[東京大学 2006 年後期 $\boxed{3}$]

数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

などについて，次のような一般的な考察をしてみよう。 $p,\ n$ を自然数とする。

(1) $p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ があって，数列の和 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ が $S_p(n)$ と表されることを示せ。

(2) q を自然数とする。(1)の多項式 $S_1(x),\ S_3(x),\ \cdots,\ S_{2q-1}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q} a_j S_{2j-1}(x) = x^q(x+1)^q$$

が恒等式となるような定数 $a_1,\ \cdots,\ a_q$ を q を用いて表せ。

(3) q を 2 以上の自然数とする。(1)の多項式 $S_2(x),\ S_4(x),\ \cdots,\ S_{2q-2}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$$

が恒等式となるような定数 c と $b_1,\ \cdots,\ b_{q-1}$ を q を用いて表せ。

(4) p を 3 以上の奇数とする。このとき，

$$\frac{d}{dx}S_p(x) = pS_{p-1}(x)$$

を示せ。

---

2 つの多項式 $f(x),\ g(x)$ が恒等式となる必要十分条件は

$f(0)=g(0)$ …（＊） かつ $f(x)-f(x-1)=g(x)-g(x-1)$ が恒等式

が成立することである。

(1) (2), (3)における（＊）に相当する議論のために,

$S_p(x)$ は $S_p(0)=0$ なる $p+1$ 次多項式 …（＊２）

であることを示す。

$p=1$ のとき $S_1(x)=\dfrac{1}{2}x(x+1)$ は $S_1(0)=0$ の 2 次式であるから（＊２）は成立。

$p=1,2,\cdots,\ell$ のとき（＊２）が成立すると仮定する。

このとき，$(k+1)^{\ell+2}-k^{\ell+2}=(\ell+2)k^{\ell+1}+\sum_{i=1}^{\ell}{}_{\ell+2}\mathrm{C}_i k^i+1$ …① が成立し，

①で，$k=1,2,\cdots,n$ としたものを加えると

$(n+1)^{\ell+2}-1=(\ell+2)S_{\ell+1}(n)+\sum_{i=1}^{\ell}{}_{\ell+2}\mathrm{C}_i S_i(n)+n$ となり

$S_{\ell+1}(n)=\dfrac{1}{\ell+2}\left\{(n+1)^{\ell+2}-\overbrace{\sum_{i=1}^{\ell}{}_{\ell+2}\mathrm{C}_i S_i(n)}^{n\text{の}n+1\text{次以下の多項式}}-n-1\right\}$ が任意の自然数 n について成立する。

よって，$S_{\ell+1}(x)$ は $\ell+2$ 次の多項式となる。

また，$S_{\ell+1}(0)=\dfrac{1}{\ell+2}\left\{1-\sum_{i=1}^{\ell}{}_{\ell+2}\mathrm{C}_i\cdot 0-0-1\right\}=0$ であるから，

（＊２）は $p=\ell+1$ のときも成立する。

よって数学的帰納法により，

任意の自然数 p に対して $S_p(x)$ は $S_p(0)=0$ を満たす $p+1$ 次多項式となる。

(2) 多項式に関する等式 $\sum_{j=1}^{q}a_j S_{2j-1}(x)=x^q(x+1)^q$ …②

が恒等式となる条件は，②が $x=0$ で成立し，かつ

$\sum_{j=1}^{q}a_j\left\{S_{2j-1}(x)-S_{2j-1}(x-1)\right\}=x^q(x+1)^q-(x-1)^q x^q$ …③ が恒等式となることである。

今，任意の自然数 x に対して

$S_p(x)-S_p(x-1)=x^p$ …④

が成立するので，④は恒等式であり，これより③は

$\sum_{j=1}^{q}a_j x^{2j-1}=x^q(x+1)^q-(x-1)^q x^q$ …⑤

となる。

$x=0$ のとき ②は $0=0$ となり成立するので，②が恒等式となる必要十分条件は

⑤が恒等式となることである。

⑤の右辺は $x^q(x+1)^q-(x-1)^q x^q=x^q\left\{(x+1)^q-(x-1)^q\right\}$ であるが，

$(x \pm 1)^q = {}_q\mathrm{C}_0 x^q \pm {}_q\mathrm{C}_1 x^{q-1} + {}_q\mathrm{C}_2 x^{q-2} \pm {}_q\mathrm{C}_3 x^{q-3} + \cdots$（複号同順）

であるので

$$x^q\left\{(x+1)^q - (x-1)^q\right\} = 2x^q\left\{{}_q\mathrm{C}_1 x^{q-1} + {}_q\mathrm{C}_3 x^{q-3} + \cdots\right\}$$

$$= 2{}_q\mathrm{C}_1 x^{2q-1} + 2{}_q\mathrm{C}_3 x^{2q-3} + \cdots$$

となるので，

$a_q = 2{}_q\mathrm{C}_1,\ a_{q-1} = 2{}_q\mathrm{C}_3,\ \cdots,\ a_{q-i} = 2{}_q\mathrm{C}_{2i+1}, \cdots$

と定めれば⑤は恒等式となり，よって②も恒等式となる。

ただし，$2i+1>q$ のとき $a_{q-i}=0$ である。

ここで，$q-i=j$ とおき，i を消去すると

$$a_j = \begin{cases} 2{}_q\mathrm{C}_{2(q-j)+1} & \left(\dfrac{q+1}{2} \leqq j\right) \\ 0 & \left(j < \dfrac{q+1}{2}\right) \end{cases}$$

(3) (2)と同様に考えれば

$\displaystyle\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$ …⑥

が $x=0$ で成立することから

$f(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$ とおくと

$\displaystyle\sum_{j=1}^{q-1} b_j x^{2j} = f(x) - f(x-1)$（$=F(x)$ とおく） …⑦

が恒等式となれば⑥は恒等式である。

今，⑦の左辺は偶関数である。右辺がそうなるためには

$F(1) = F(-1)$

$\Leftrightarrow$ $f(1) - f(0) = f(-1) - f(-2)$

$\Leftrightarrow$ $2^{q-1}(c+q) = -2^{q-1}(-2c+q)$

$\Leftrightarrow$ $c = 2q$

が必要であり，このとき

$$F(x)=qx^{q-1}\left\{(x+1)^{q-1}(2x+1)-(x-1)^{q-1}(2x-1)\right\}$$

$$=qx^{q-1}\left\{(x+1)^{q}-(x-1)^{q}\right\}+qx^{q}\left\{(x+1)^{q-1}-(x-1)^{q-1}\right\}$$

$$=2q\left({}_q\mathrm{C}_1+{}_{q-1}\mathrm{C}_1\right)x^{2q-2}+2q\left({}_q\mathrm{C}_3+{}_{q-1}\mathrm{C}_3\right)x^{2q-4}+\cdots+2q\left({}_q\mathrm{C}_{2i-1}+{}_{q-1}\mathrm{C}_{2i-1}\right)x^{2q-2i}+\cdots$$

は偶関数となる。ここで，

$$\begin{aligned}{}_q\mathrm{C}_{2i-1}+{}_{q-1}\mathrm{C}_{2i-1}&={}_q\mathrm{C}_{2i-1}+\frac{(q-1)!}{(2i-1)!(q-2i)!}\\&={}_q\mathrm{C}_{2i-1}+\frac{q-2i+1}{q}\,{}_q\mathrm{C}_{2i-1}\\&=\frac{2q-2i+1}{q}\,{}_q\mathrm{C}_{2i-1}\end{aligned}$$

であるから，

$$F(x)=2(2q-1)_q\mathrm{C}_1x^{2q-2}+2(2q-3)_q\mathrm{C}_3x^{2q-4}+\cdots+2(2q-2i+1)_q\mathrm{C}_{2i-1}x^{2q-2i}+\cdots$$

となり，$b_{q-i}=2\left\{2(q-i)+1\right\}{}_q\mathrm{C}_{2i-1}$ と定めれば⑦は恒等式となり，よって⑥も恒等式となる。

ただし，$2i-1>q$ のとき $b_{q-i}=0$ である。

ここで，$q-i=j$ とおき i を消去すると

$$b_j=\begin{cases}2(2j+1)\,{}_q\mathrm{C}_{2(q-j)-1} & \left(\dfrac{q-1}{2}\leqq j\right)\\ 0 & \left(j<\dfrac{q-1}{2}\right)\end{cases}$$

(4) まず，(2)，(3)により

$$b_{j-1}=\begin{cases}2(2j-1)\,{}_q\mathrm{C}_{2(q-j)+1} & \left(\dfrac{q+1}{2}\leqq j\right)\\ 0 & \left(j<\dfrac{q+1}{2}\right)\end{cases}$$

$$=(2j-1)a_j \quad \cdots⑧$$

が成立する。このとき $p=2\ell-1$（$\ell\geqq 2$）に対して

$S_p{}'(x)=pS_{p-1}(x)$ すなわち $S_{2\ell-1}{}'(x)=(2\ell-1)S_{2\ell-2}(x)$ …（＊３）

の成立を帰納法で示す。

$\ell=2$ のとき

$$S_3{}'(x)=2\left\{\frac{x(x+1)}{2}\right\}\cdot\left\{\frac{x(x+1)}{2}\right\}'=2\left\{\frac{x(x+1)}{2}\right\}\cdot\frac{(x+1)+x}{2}=\frac{1}{2}x(x+1)(2x+1)=3S_2(x)$$

により（＊３）は成立。

$\ell=2,\ 3,\ \cdots,\ q-1$（$q\geqq 3$）での成立を仮定すると

$$\left.\begin{array}{l} S_3{}'(x)=3S_2(x),\ S_5{}'(x)=5S_4(x),\ \cdots, \\ S_{2j+1}{}'(x)=(2j+1)S_{2j}(x),\ \cdots, \\ S_{2q-3}{}'(x)=(2q-3)S_{2q-4}(x) \end{array}\right\}\ \cdots ⑨$$

である。

ここで，$x^q(x+1)^{q+1}=a_1S_1(x)+a_2S_3(x)+a_3S_5(x)+\cdots+a_{q-1}S_{2q-3}(x)+a_qS_{2q-1}(x)$

の両辺を微分すると，⑧，⑨により

$$qx^{q-1}(x+1)^{q-1}(2x+1)=a_1S_1{}'(x)+3a_2S_2(x)+5a_3S_4(x)+\cdots+(2q-3)a_{q-1}S_{2q-4}(x)+a_qS_{2q-1}{}'(x)$$

$$=a_1S_1{}'(x)+b_1S_2(x)+b_2S_4(x)+\cdots+b_{q-2}S_{2q-4}(x)+a_qS_{2q-1}{}'(x)$$

が成立する。よって(3)から

$$\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x)=a_1S_1{}'(x)+b_1S_2(x)+b_2S_4(x)+\cdots+b_{q-2}S_{2q-4}(x)+a_qS_{2q-1}{}'(x)$$

つまり $a_1S_1{}'(x)+a_qS_{2q-1}{}'(x)=b_{q-1}S_{2q-2}(x)$

$$=(2q-1)a_qS_{2q-2}(x)$$

となる。

さて，(2)から $q\geqq 3$ のとき $a_1=0$ であり，また $a_q={}_2{}_q\mathrm{C}_1\neq 0$ により

$S_{2q-1}{}'(x)=(2q-1)S_{2q-2}(x)$ となるので，（＊３）は $\ell=q$ でも成立する。

以上から 3 以上の奇数 p に対して $S_p{}'(x)=pS_{p-1}(x)$ が成立する。