[東京大学 2006 年後期 $\boxed{3}$]

数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

などについて，次のような一般的な考察をしてみよう。$p,\ n$ を自然数とする。

(1) $p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ があって，数列の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ が $S_p(n)$ と表されることを示せ。

(2) q を自然数とする。(1)の多項式 $S_1(x),\ S_3(x),\ \cdots,\ S_{2q-1}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q} a_j S_{2j-1}(x) = x^q(x+1)^q$$

が恒等式となるような定数 $a_1,\ \cdots,\ a_q$ を q を用いて表せ。

(3) q を 2 以上の自然数とする。(1)の多項式 $S_2(x),\ S_4(x),\ \cdots,\ S_{2q-2}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$$

が恒等式となるような定数 c と $b_1,\ \cdots,\ b_{q-1}$ を q を用いて表せ。

(4) p を 3 以上の奇数とする。このとき，

$$\frac{d}{dx}S_p(x) = pS_{p-1}(x)$$

を示せ。