[東京大学 2006 年後期 $\boxed{2}$]

a を正の実数，θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。

xyz 空間において，点 $(a,\,0,\,0)$ と点 $(a+\cos\theta,\,0,\,\sin\theta)$ を結ぶ線分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を S とする。さらに，S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。

次の問に答えよ。

(1) V を a と θ を用いて表せ。

(2) $a=4$ とする。V を θ の関数と考えて，V の最大値を求めよ。

---

(1) S は $\theta=0$ のとき線分，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき円錐の側面，

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき円板となる。

S は xz 平面（$y=0$）に関して対称であるから，

V は $y \geqq 0$ の部分の体積の 2 倍である。

(i) $\theta=0$ のとき

S は線分だから $V=0$ となる。

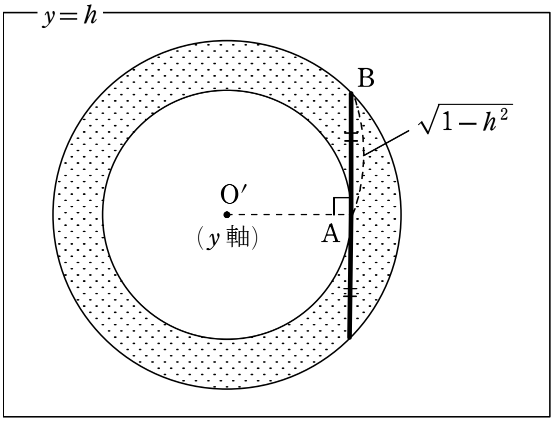
(ii) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

S を $y=h$（$0 \leqq h \leqq 1$）で切った切り口は図のような線分となる。

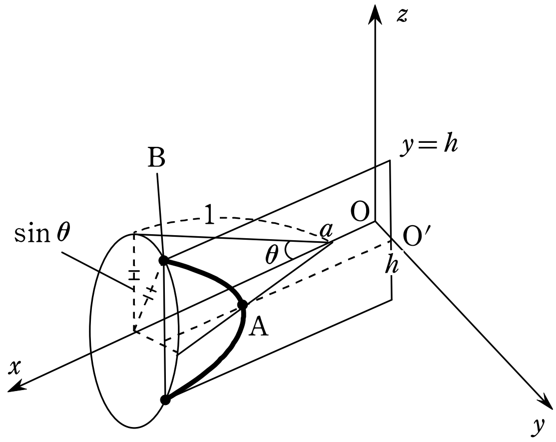
よって S を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の平面 $y=h$ による切り口の断面積 $S(h)$ は

$S(h)=\pi\left(\mathrm{O'B}^2-\mathrm{O'A}^2\right)=\pi \mathrm{AB}^2=\pi(1-h^2)$ となり，

$V=2\pi\displaystyle\int_0^1(1-h^2)\,dh=\frac{4}{3}\pi$ となる。



(iii) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき



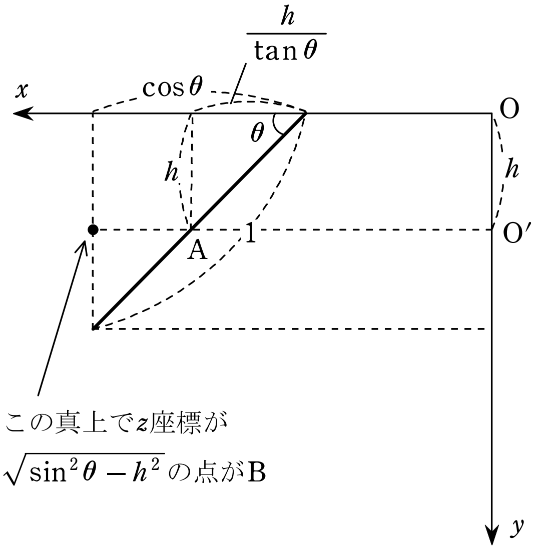
S を平面 $y=h$（$0 \leqq h \leqq \sin\theta$）で切った切り口は，

図の太線（双曲線，ただし，$h=0$ のときは折れ線）

のようになり，

O′ から一番近い点と遠い点は，右図の A, B である。

そして，右下図のようになることから



$$\mathrm{A}\left(a+\frac{h}{\tan\theta},\ h,\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(a+\cos\theta,\ h,\ \sqrt{\sin^2\theta-h^2}\right)$$

よって，平面 $y=h$ による切り口の面積 $S(h)$ は

$$S(h)=\pi\left(\mathrm{O'B}^2-\mathrm{O'A}^2\right)$$

$$=\pi\left\{(a+\cos\theta)^2+(\sin^2\theta-h^2)-\left(a+\frac{h}{\tan\theta}\right)^2\right\}$$

$$=\pi\left\{1+2a\cos\theta-\frac{2ah}{\tan\theta}-\frac{h^2}{\sin^2\theta}\right\}$$

したがって

$$V=2\int_0^{\sin\theta}S(h)\,dh$$

$$=2\pi\int_0^{\sin\theta}\left\{1+2a\cos\theta-\frac{2ah}{\tan\theta}-\frac{h^2}{\sin^2\theta}\right\}dh$$

$$=2\pi\left[(1+2a\cos\theta)h-\frac{a}{\tan\theta}h^2-\frac{1}{3\sin^2\theta}h^3\right]_0^{\sin\theta}$$

$$=2\pi\left\{(1+2a\cos\theta)\sin\theta-a\sin\theta\cos\theta-\frac{\sin\theta}{3}\right\}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\sin\theta\left(3a\cos\theta+2\right)$$

となる。

（iii）において $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ とおいたものは，それぞれ（ｉ），（ii）に一致するので

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $V=\dfrac{2\pi}{3}\sin\theta\left(3a\cos\theta+2\right)$ となる。

（4） $a=4$ より $V=\dfrac{4\pi}{3}\sin\theta\left(6\cos\theta+1\right)$ であるから

$$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{dV}{d\theta}=\cos\theta(6\cos\theta+1)-\sin\theta\cdot 6\sin\theta$$

$$=6\cos^2\theta+\cos\theta-6\sin^2\theta$$

$$=12\cos^2\theta+\cos\theta-6$$

$$=(3\cos\theta-2)(4\cos\theta+3)$$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ を満たす α （$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$）をとると

V の増減は次表に従う。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dV}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

よって $\theta=\alpha$ のとき V は最大となり，このとき $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ であるから

$V=\dfrac{4\pi}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdot 5=\dfrac{20\sqrt{5}}{9}\pi$ となる。