[東京大学 2006 年後期 $\boxed{1}$]

---

xy 平面上で t を変数とする媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = t + 2t^2 \end{cases}$ で表される曲線を C とする。

次の問に答えよ。

(1) $t \neq -1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。

(2) 曲線 C 上で $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}$ を満たす点 A の座標を求めよ。

(3) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ を $(X,\ Y)$ に移す移動が $\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \end{cases}$ で表されているとする。

このとき Y を X を用いて表せ。

(4) 曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

---

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 2 + 2t,\ \dfrac{dy}{dt} = 1 + 4t$ であるから

$t \neq -1$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+4t}{2(1+t)}$ …①

(2) $\dfrac{1+4t}{2(1+t)} = -\dfrac{1}{2}$ を解くと $t = -\dfrac{2}{5}$

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + t^2 \\ t + 2t^2 \end{pmatrix}$ に代入して $\mathrm{A}\left(-\dfrac{16}{25},\ -\dfrac{2}{25}\right)$

(3) $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ …② および $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ から

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3t \\ 5t^2 + 4t \end{pmatrix}$ なので

$X = \dfrac{3}{\sqrt{5}}t,\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(5t^2 + 4t\right)$

ここから t を消去して

$Y = \dfrac{5\sqrt{5}}{9}X^2 + \dfrac{4}{3}X$ …③

(4) $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を満たすθは存在する。

このθによって②は $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せ，

これは原点中心のθ回転の移動を表すから

Cは放物線③を原点中心に$-\theta$回転したものとなる。

つまり，XY平面に描いた図形を図のようにxy平面に重ねればよい。

このとき，放物線の頂点は，頂点における接線の傾きがX軸，

つまり $y=-\dfrac{1}{2}x$ に平行となることから，(2)よりAとなる。

また，放物線の軸はAを通りY軸，つまり $y=2x$ に平行な直線であるから

$y=2x+\dfrac{6}{5}$ となる。

さらに，Cとx軸，y軸との交点は

$x=0 \iff t=-2,\ 0$

$y=0 \iff t=-\dfrac{1}{2},\ 0$

であるから，$(0,0)$，$(0,6)$，$\left(-\dfrac{3}{4},\ 0\right)$ となる。

そして，x座標，y座標が最小となる点は

$\dfrac{dx}{dt}=0 \iff t=-1$

$\dfrac{dy}{dt}=0 \iff t=-\dfrac{1}{4}$

によりそれぞれ $(-1,1)$，$\left(-\dfrac{7}{16},\ -\dfrac{1}{8}\right)$ となる。

以上を踏まえて図示すると，右図のようになる。