［ 東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{1}$ ］

O を原点とする座標平面上の 4 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ で，条件

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\quad (n=2, 3)$$

を満たすものを考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ が曲線 $xy=1$ 上にあるとき，P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。

(2) $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき，P_4 もこの円周上にあることを示せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\overrightarrow{p_n}\quad (n=1, 2, 3, 4)$ とおくと，

$\overrightarrow{p_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{p_n}-\overrightarrow{p_{n-1}}\quad (n=2, 3)$ …①

$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ が曲線 $xy=1$ 上にあるとき $\mathrm{P}_1\left(p, \frac{1}{p}\right), \mathrm{P}_2\left(q, \frac{1}{q}\right)$ とおけて

$\overrightarrow{p_3}=\frac{3}{2}\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}=\left(\frac{3}{2}q-p, \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)$ となり，これが P_3 の座標である。

x 成分と y 成分の積は $\frac{9}{4}+1-\frac{3}{2}\left(\frac{q}{p}+\frac{p}{q}\right)$ …②

であり，p, q が異符号ならば ②$>\frac{13}{4}$ である。

また，p, q が同符号ならば，② $\leqq\frac{13}{4}-\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{q}{p}\cdot\frac{p}{q}}=\frac{1}{4}$

となり，いずれにしても，②$\neq 1$ であるので P_3 は曲線 $xy=1$ 上にはない。

(2) $|\overrightarrow{p_1}|=|\overrightarrow{p_2}|=1$ とする。

このとき，$|\overrightarrow{p_3}|^2=\left|\frac{3}{2}\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}\right|^2$

$$=\frac{9}{4}\cdot 1^2+1^2-3\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}$$

よって，$|\overrightarrow{p_3}|=1$ となる条件は $\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}=\dfrac{3}{4}$ …③

また，$\overrightarrow{p_4}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{p_3}-\overrightarrow{p_2}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}\right)-\overrightarrow{p_2}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{p_2}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{p_1}$

したがって，③が成り立つとき

$|\overrightarrow{p_4}|^2=\dfrac{25}{16}+\dfrac{9}{4}-\dfrac{15}{4}\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}=1$

よって，P_4 も円 $x^2+y^2=1$ の周上にある。

[東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{2}$]

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。

このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n，とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) $n \geqq 3$ のとき，P_n を p と n で表せ。

---

(1) ×が 2 個以内のもとで，2 個目の○が出るまでの出方について考えればよい。

「×○○」「××○○」「×○×○」

の 3 通りあるから，求める確率 P_2 は $p(1-p)+p^2(1-p)+(1-p)^3=(1-p)(2p^2-p+1)$

(2) 次の出方が考えられる。

$\boxed{0}$ $\times\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\cdots\cdots\bigcirc}_{n\text{個}}$

$\boxed{1}$ $\times\times\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\cdots\cdots\bigcirc\bigcirc}_{n\text{個}}$

$\boxed{2}$ ×○×○………○○

$\boxed{3}$ ×○○×○…… ○○

………

$\boxed{n}$ ×○○○…… ○×○

これら $n+1$ 通りの出方について

$\boxed{0}$の確率は $p^{n-1}(1-p)$，$\boxed{1}$の確率は $p^n(1-p)$，$\boxed{2}$～$\boxed{n}$ の各確率は $(1-p)^3p^{n-2}$

したがって，求める確率 P_n は

$$(1-p)\{p^{n-1}+p^n+(n-1)(1-p)^2p^{n-2}\}=(1-p)p^{n-2}\{p+p^2+(n-1)(1-p)^2\}$$

$$=(1-p)p^{n-2}\{np^2-(2n-3)p+(n-1)\}$$

[東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{3}$]

O を原点とする座標平面上に，y 軸上の $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 $m: y=(\tan\theta)x$ が与えられている。

ここで，$p>1,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

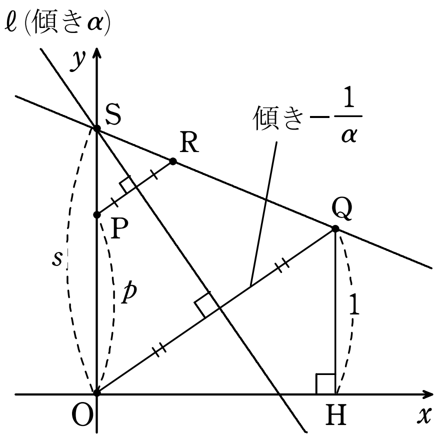
いま，傾きが α の直線 ℓ を対称軸とする対称移動を行うと，原点 O は直線 $y=1$ の，第 1 象限の点 Q に移り，y 軸上の点 P は直線 m 上の，第 1 象限上の点 R に移った。

(1) このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 ℓ に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。

(1) 図のようになることから $\mathrm{OH}=-\alpha$ である。



よって，$\mathrm{Q}(-\alpha,1)$ で，$\ell: y=\alpha\left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$

したがって，ℓ と y 軸との交点を S として，

$\mathrm{OS}=s$ とおくと $s=\dfrac{1}{2}(\alpha^2+1)$ で，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{SO}}\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=\begin{pmatrix}0\\ s\end{pmatrix}+\frac{s-p}{s}\begin{pmatrix}-\alpha\\ 1-s\end{pmatrix}$$

直線 OR の傾きが $\tan\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\left\{s+\frac{(s-p)(1-s)}{s}\right\}\div\frac{-\alpha(s-p)}{s}\\&=-\frac{s^2+(s-p)(1-s)}{\alpha(s-p)}\\&=-\frac{(p+1)s-p}{\alpha(s-p)}\\&=-\frac{(p+1)(\alpha^2+1)-2p}{\alpha(\alpha^2+1-2p)}\\&=-\frac{(p+1)\alpha^2+1-p}{\alpha(\alpha^2+1-2p)}\end{aligned}$$

(2) ℓ に垂直な傾きについて $\tan\dfrac{\theta}{3}=-\dfrac{1}{\alpha}$ …①

$\dfrac{\theta}{3}=w$ とおくと

$$\tan\theta=\tan 3w$$

$$=\frac{\tan 2w+\tan w}{1-\tan 2w\tan w}$$

$$=\left(\frac{2\tan w}{1-\tan^2 w}+\tan w\right)\div\left(1-\frac{2\tan^2 w}{1-\tan^2 w}\right)$$

$$=\frac{3\tan w-\tan^3 w}{1-3\tan^2 w}$$

$$=\frac{-\dfrac{3}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}}{1-\dfrac{3}{\alpha^2}}$$

$$=\frac{1-3\alpha^2}{\alpha(\alpha^2-3)} \quad \cdots②$$

題意の条件は，どのような θ，すなわちどのような α（ただし，①により $\alpha<-\sqrt{3}$）に対しても

②が(1)の結果と同じになることである。

よって $\dfrac{1-3\alpha^2}{\alpha(\alpha^2-3)}=-\dfrac{(p+1)\alpha^2+1-p}{\alpha(\alpha^2+1-2p)} \Leftrightarrow \dfrac{1-3\alpha^2}{\alpha^2-3}=-\dfrac{(p+1)\alpha^2+1-p}{\alpha^2+1-2p}$ …③

が成り立つことである。

$\alpha=-2$ のときから $-11=-\dfrac{3p+5}{5-2p} \Leftrightarrow p=2$ であることが必要で，

このとき確かに③は α の恒等式となる。

よって，$p=2$

[東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{4}$]

次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

条件(A)：$x,\ y,\ z$ は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす $(x,\ y,\ z)$ で，$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組 $(a,\ b,\ c)$ が条件(A)を満たすとする。このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は無数に存在することを示せ。

---

(1) $x^2+y^2+z^2=xyz$ …①，$x \leqq y \leqq z$ …②

① ⇔ $z^2-xyz+x^2+y^2=0$ …①´

これが実数解 z をもつ条件は $D=x^2y^2-4(x^2+y^2) \geqq 0$

$$(x^2-4)(y^2-4) \geqq 16 \quad \cdots③$$

$y \leqq 3$ より $x^2=1,\ 4,\ 9$，$y^2=1,\ 4,\ 9$ なので

③を満たすのは $x^2=9,\ y^2=9$ のときで，このとき $x=y=3$ となる。

このとき，$x=y=3$ より ①´ ⇔ $z^2-9z+18=0$

⇔ $(z-3)(z-6)=0$ より $z=3,\ 6$（$z \geqq y$ を満たしている）

したがって $(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 6)$

(2) $a,\ b,\ c$ は

$a^2+b^2+c^2=abc$ …④

$a \leqq b \leqq c$

を満たす。

このとき，$b^2+c^2+z^2=bcz$ …⑤，$b \leqq c \leqq z$ を満たす整数 z を求める。

⑤－④より $z^2-a^2=bc(z-a)$

$(z-a)(z-bc+a)=0$

$z=a,\ bc-a$

ここで，(1)より $b \geqq 3$ なので

$$bc-a \geqq 3c-a$$

$$= c+c+(c-a) > c$$

であるから $z=bc-a$ が解である。よって示された。

(3) $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ を次のように定める。

・$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(3,\ 3,\ 6)$

・$(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})=(y_n,\ z_n,\ y_nz_n-x_n)$

このとき，(Ⅰ) $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ は(A)を満たす。

(Ⅱ) $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ が(A)を満たせば，$(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})$ も(A)を満たす。

よって $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$(x_n,\ y_n,\ z_n)$ は(A)を満たす。

さらに，$bc-a>c$ より $z_{n+1}=y_nz_n-x_n>z_n$ であるから $z_1<z_2<z_3<\cdots$ となるので，

$(x_n,\ y_n,\ z_n)$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) はすべて異なる。

したがって，(A)を満たす $(x,\ y,\ z)$ は無数に存在する。

［ 東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{5}$ ］

$a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列$\{a_n\}$を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。

$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(1+a_n)^2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+2+a_n$ により

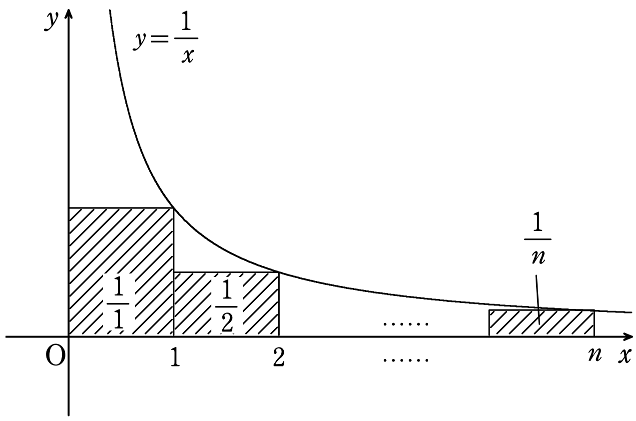
$b_{n+1}=b_n+2+a_n$ （$b_1=2$）…①

① および $a_n>0$ により，$b_{n+1}>b_n+2$ で，これを繰り返し用いると

$k>1$ のとき $b_k>b_{k-1}+2>b_{k-2}+2\cdot2>\cdots>b_1+2(k-1)=2k$

よって題意は示された。

(2) (1)により $a_k=\dfrac{1}{b_k}\leqq\dfrac{1}{2k}$ であるから



$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\leqq\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$\leqq\frac{1}{2n}\left(1+\int_1^n\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$

（3） $na_n=\dfrac{n}{b_n}$ であり，①により

$$b_n=b_{n-1}+2+a_{n-1}$$

$$=\cdots$$

$$=b_1+2(n-1)+(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1)$$

$$=2n+(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1)$$

よって $na_n=\dfrac{n}{2n+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}$

$$=\frac{1}{2+\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}$$

したがって，(1)とから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{2+1\cdot 0}=\frac{1}{2}$

[東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{6}$]

$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ。

すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。

このとき，定積分 $\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx$ を求めよ。

---

(1) $e^x=X$ とおくと $f(x)=\dfrac{12(X^3-3X)}{X^2-1}$ （$x>0$ より $X>1$）

この関数 $F(X)$ が増加関数で，値域が実数全体であることを示す。

$F'(X)=12\cdot\dfrac{(3X^2-3)(X^2-1)-(X^3-3X)\cdot 2X}{(X^2-1)^2}=12\cdot\dfrac{X^4+3}{(X^2-1)^2}>0$ より増加関数である。

また，$X\to 1$ $(X>1)$ のとき $F(X)\to-\infty$ であり，

$X\to\infty$ のとき $F(X)\to\infty$ であるから，$F(X)$ $(X>1)$ の値域は実数全体である。

よって題意は示された。

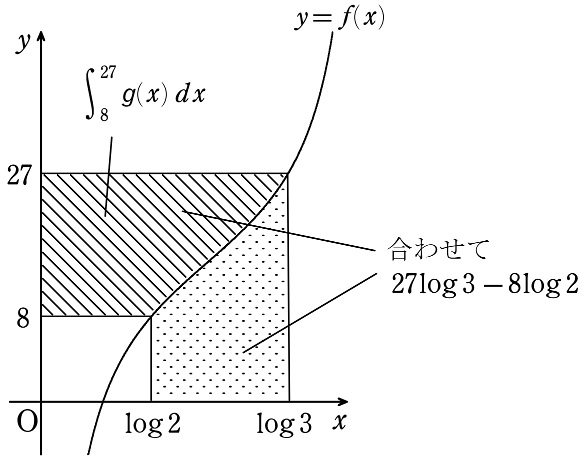
(2) $F(X)=8$ のとき

$\dfrac{X^3-3X}{X^2-1}=\dfrac{2}{3}$ より $X=2$ なので $x=\log 2$

$F(X)=27$ のとき

$\dfrac{X^3-3X}{X^2-1}=\dfrac{9}{4}$ より $X=3$ なので $x=\log 3$

よって，図のようになるので，



$\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx=27\log 3-8\log 2-\int_{\log 2}^{\log 3} f(x)\,dx$

ここで，$e^x=t$ とおくと $x=\log t,\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$ なので

$$\int_{\log 2}^{\log 3} f(x)\,dx=\int_2^3\frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=\int_2^3\frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}\,dt$$

$$=12\int_2^3\left(1-\frac{2}{t^2-1}\right)dt$$

$$=12\int_2^3\left(1-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=12\left[t+\log\frac{t+1}{t-1}\right]_2^3$$

$$=12(1+\log 2-\log 3)$$

したがって，題意の定積分は

$$27\log 3-8\log 2-12(1+\log 2-\log 3)=39\log 3-20\log 2-12$$