[東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{6}$]

$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ。

すなわち，任意の実数 a に対して， $f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。

このとき，定積分 $\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx$ を求めよ。

(1) $e^x=X$ とおくと $f(x)=\dfrac{12(X^3-3X)}{X^2-1}$ （$x>0$ より $X>1$）

この関数 $F(X)$ が増加関数で，値域が実数全体であることを示す。

$F'(X)=12\cdot\dfrac{(3X^2-3)(X^2-1)-(X^3-3X)\cdot 2X}{(X^2-1)^2}=12\cdot\dfrac{X^4+3}{(X^2-1)^2}>0$ より増加関数である。

また， $X\to 1$ $(X>1)$ のとき $F(X)\to-\infty$ であり，

$X\to\infty$ のとき $F(X)\to\infty$ であるから， $F(X)$ $(X>1)$ の値域は実数全体である。

よって題意は示された。

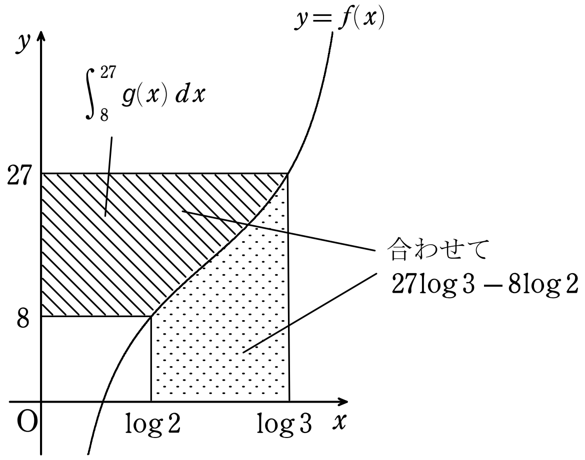
(2) $F(X)=8$ のとき

$\dfrac{X^3-3X}{X^2-1}=\dfrac{2}{3}$ より $X=2$ なので $x=\log 2$

$F(X)=27$ のとき

$\dfrac{X^3-3X}{X^2-1}=\dfrac{9}{4}$ より $X=3$ なので $x=\log 3$

よって，図のようになるので，



$\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx=27\log 3-8\log 2-\int_{\log 2}^{\log 3} f(x)\,dx$

ここで， $e^x=t$ とおくと $x=\log t,\ \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t}$ なので

$\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} f(x)\,dx=\int_2^3 \frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt$

$\displaystyle\qquad=\int_2^3 \frac{12(t^3-3t)}{t^2-1}\,dt$

$$=12\int_2^3\left(1-\frac{2}{t^2-1}\right)dt$$

$$=12\int_2^3\left(1-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=12\left[t+\log\frac{t+1}{t-1}\right]_2^3$$

$$=12(1+\log 2-\log 3)$$

したがって，題意の定積分は

$$27\log 3-8\log 2-12(1+\log 2-\log 3)=39\log 3-20\log 2-12$$