[東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{5}$]

$a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。

$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

---

(1) $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(1+a_n)^2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+2+a_n$ により

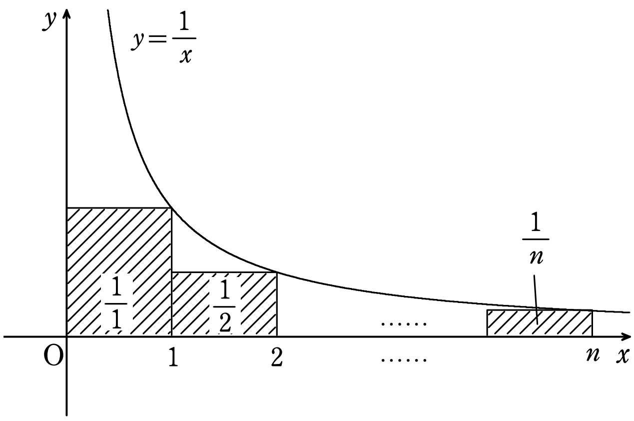
$b_{n+1}=b_n+2+a_n$ （$b_1=2$）…①

① および $a_n>0$ により，$b_{n+1}>b_n+2$ で，これを繰り返し用いると

$k>1$ のとき $b_k>b_{k-1}+2>b_{k-2}+2\cdot 2>\cdots>b_1+2(k-1)=2k$

よって題意は示された。

(2) (1)により $a_k=\dfrac{1}{b_k}\leqq\dfrac{1}{2k}$ であるから



$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\leqq\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$\leqq\frac{1}{2n}\left(1+\int_1^n\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

したがって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$

(3) $na_n=\dfrac{n}{b_n}$ であり，①により

$$b_n=b_{n-1}+2+a_{n-1}$$
$$=\cdots$$
$$=b_1+2(n-1)+(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1)$$
$$=2n+(a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_1)$$

よって $na_n=\dfrac{n}{2n+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}$

$$=\frac{1}{2+\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{1}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}$$

したがって，(1)とから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{2+1\cdot 0}=\frac{1}{2}$