## [ 東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{4}$ ]

次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

条件(A)： $x,\ y,\ z$ は正の整数で， $x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす $(x,\ y,\ z)$ で， $y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組 $(a,\ b,\ c)$ が条件(A)を満たすとする。このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件(A)を満たすような $z$ が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は無数に存在することを示せ。

---

(1) $x^2+y^2+z^2=xyz$ …①， $x \leqq y \leqq z$ …②

① ⇔ $z^2-xyz+x^2+y^2=0$ …①´

これが実数解 $z$ をもつ条件は $D=x^2y^2-4(x^2+y^2) \geqq 0$

$$(x^2-4)(y^2-4) \geqq 16 \quad \cdots③$$

$y \leqq 3$ より $x^2=1,\ 4,\ 9$， $y^2=1,\ 4,\ 9$ なので

③を満たすのは $x^2=9,\ y^2=9$ のときで，このとき $x=y=3$ となる。

このとき， $x=y=3$ より ①´ ⇔ $z^2-9z+18=0$

⇔ $(z-3)(z-6)=0$ より $z=3,\ 6$（$z \geqq y$ を満たしている）

したがって $(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 6)$

(2) $a,\ b,\ c$ は

$a^2+b^2+c^2=abc$ …④

$a \leqq b \leqq c$

を満たす。

このとき， $b^2+c^2+z^2=bcz$ …⑤， $b \leqq c \leqq z$ を満たす整数 $z$ を求める。

⑤−④より $z^2-a^2=bc(z-a)$

$(z-a)(z-bc+a)=0$

$z=a,\ bc-a$

ここで，(1)より $b \geqq 3$ なので

$$bc-a \geqq 3c-a$$

$$= c+c+(c-a) > c$$

であるから $z=bc-a$ が解である。よって示された。

(3) $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ を次のように定める。

・$(x_1,\ y_1,\ z_1)=(3,\ 3,\ 6)$

・$(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})=(y_n,\ z_n,\ y_n z_n - x_n)$

このとき，(Ⅰ) $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ は(A)を満たす。

(Ⅱ) $(x_n,\ y_n,\ z_n)$ が(A)を満たせば，$(x_{n+1},\ y_{n+1},\ z_{n+1})$ も(A)を満たす。

よって $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$(x_n,\ y_n,\ z_n)$ は(A)を満たす。

さらに，$bc-a>c$ より $z_{n+1}=y_n z_n - x_n > z_n$ であるから $z_1<z_2<z_3<\cdots$ となるので，

$(x_n,\ y_n,\ z_n)$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）はすべて異なる。

したがって，(A)を満たす $(x,\ y,\ z)$ は無数に存在する。