[東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{3}$]

O を原点とする座標平面上に，y 軸上の $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 $m: y=(\tan\theta)x$ が与えられている。

ここで，$p>1,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

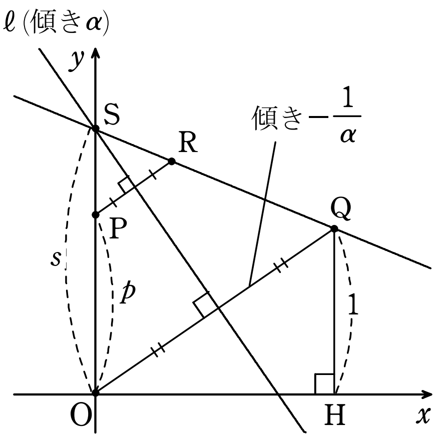
いま，傾きが α の直線 ℓ を対称軸とする対称移動を行うと，原点 O は直線 $y=1$ の，第 1 象限の点 Q に移り，y 軸上の点 P は直線 m 上の，第 1 象限上の点 R に移った。

(1) このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 ℓ に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。

(1) 図のようになることから $\mathrm{OH}=-\alpha$ である。



よって，$\mathrm{Q}(-\alpha,\ 1)$ で，$\ell: y=\alpha\left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$

したがって，ℓ と y 軸との交点を S として，

$\mathrm{OS}=s$ とおくと $s=\dfrac{1}{2}(\alpha^2+1)$ で，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}+\frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{SO}}\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=\begin{pmatrix}0\\ s\end{pmatrix}+\frac{s-p}{s}\begin{pmatrix}-\alpha\\ 1-s\end{pmatrix}$$

直線 OR の傾きが $\tan\theta$ であるから

$$\tan\theta=\left\{s+\frac{(s-p)(1-s)}{s}\right\}\div\frac{-\alpha(s-p)}{s}$$

$$=-\frac{s^2+(s-p)(1-s)}{\alpha(s-p)}$$

$$=-\frac{(p+1)s-p}{\alpha(s-p)}$$

$$=-\frac{(p+1)(\alpha^2+1)-2p}{\alpha(\alpha^2+1-2p)}$$

$$=-\frac{(p+1)\alpha^2+1-p}{\alpha(\alpha^2+1-2p)}$$

(2) ℓに垂直な傾きについて $\tan\dfrac{\theta}{3}=-\dfrac{1}{\alpha}$ …①

$\dfrac{\theta}{3}=w$ とおくと

$$\tan\theta=\tan 3w$$
$$=\frac{\tan 2w+\tan w}{1-\tan 2w\tan w}$$
$$=\left(\frac{2\tan w}{1-\tan^2 w}+\tan w\right)\div\left(1-\frac{2\tan^2 w}{1-\tan^2 w}\right)$$
$$=\frac{3\tan w-\tan^3 w}{1-3\tan^2 w}$$
$$=\frac{-\dfrac{3}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}}{1-\dfrac{3}{\alpha^2}}$$
$$=\frac{1-3\alpha^2}{\alpha(\alpha^2-3)} \quad \cdots②$$

題意の条件は，どのようなθ，すなわちどのようなα（ただし，①により $\alpha<-\sqrt{3}$）に対しても②が(1)の結果と同じになることである。

よって $\dfrac{1-3\alpha^2}{\alpha(\alpha^2-3)}=-\dfrac{(p+1)\alpha^2+1-p}{\alpha(\alpha^2+1-2p)} \Leftrightarrow \dfrac{1-3\alpha^2}{\alpha^2-3}=-\dfrac{(p+1)\alpha^2+1-p}{\alpha^2+1-2p}$ …③

が成り立つことである。

$\alpha=-2$ のときから $-11=-\dfrac{3p+5}{5-2p} \Leftrightarrow p=2$ であることが必要で，

このとき確かに③はαの恒等式となる。

よって，$p=2$