[東京大学 2006 年前期 理科 $\boxed{1}$]

O を原点とする座標平面上の 4 点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4$ で，条件

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\quad (n=2,\ 3)$$

を満たすものを考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ が曲線 $xy=1$ 上にあるとき，P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。

(2) $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$ が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき，P_4 もこの円周上にあることを示せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\overrightarrow{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とおくと，

$\overrightarrow{p_{n+1}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{p_n}-\overrightarrow{p_{n-1}}\quad (n=2,\ 3)$ …①

$\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ が曲線 $xy=1$ 上にあるとき $\mathrm{P}_1\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right),\ \mathrm{P}_2\left(q,\ \dfrac{1}{q}\right)$ とおけて

$\overrightarrow{p_3}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}=\left(\dfrac{3}{2}q-p,\ \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}\right)$ となり，これが P_3 の座標である。

x 成分と y 成分の積は $\dfrac{9}{4}+1-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}\right)$ …②

であり，$p,\ q$ が異符号ならば ②$>\dfrac{13}{4}$ である。

また，$p,\ q$ が同符号ならば，② $\leqq\dfrac{13}{4}-\dfrac{3}{2}\cdot 2\sqrt{\dfrac{q}{p}\cdot\dfrac{p}{q}}=\dfrac{1}{4}$

となり，いずれにしても，②$\neq 1$ であるので P_3 は曲線 $xy=1$ 上にはない。

(2) $|\overrightarrow{p_1}|=|\overrightarrow{p_2}|=1$ とする。

このとき，$|\overrightarrow{p_3}|^2=\left|\dfrac{3}{2}\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}\right|^2$

$$=\frac{9}{4}\cdot 1^2+1^2-3\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}$$

よって，$|\overrightarrow{p_3}|=1$ となる条件は $\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}=\dfrac{3}{4}$ …③

また，$\overrightarrow{p_4}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{p_3}-\overrightarrow{p_2}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{2}\overrightarrow{p_2}-\overrightarrow{p_1}\right)-\overrightarrow{p_2}=\dfrac{5}{4}\overrightarrow{p_2}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{p_1}$

したがって，③が成り立つとき

$|\overrightarrow{p_4}|^2=\dfrac{25}{16}+\dfrac{9}{4}-\dfrac{15}{4}\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}=1$

よって，P_4 も円 $x^2+y^2=1$ の周上にある。