

[ 東京大学 2006 年前期 理科 1 ]



O を原点とする座標平面上の 4 点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  で, 条件

$$\overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OP_{n+1}} = \frac{3}{2} \overrightarrow{OP_n} \quad (n = 2, 3)$$

を満たすものを考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1)  $P_1, P_2$  が曲線  $xy = 1$  上にあるとき,  $P_3$  はこの曲線上にはないことを示せ。
- (2)  $P_1, P_2, P_3$  が円周  $x^2 + y^2 = 1$  上にあるとき,  $P_4$  もこの円周上にあることを示せ。



[ 東京大学 2006 年前期 理科 2 ]



コンピュータの画面に、記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。

このとき、各操作で、直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は、それまでの経過に関係なく、 $p$  であるとする。

最初に、コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い、記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に、記号○が  $n$  個出る確率を  $P_n$  とする。ただし、記号○が  $n$  個出た段階で操作は終了する。

(1)  $P_2$  を  $p$  で表せ。

(2)  $n \geq 3$  のとき、 $P_n$  を  $p$  と  $n$  で表せ。



[ 東京大学 2006 年前期 理科 3 ]



O を原点とする座標平面上に、y 軸上の P(0, p) と、直線  $m: y = (\tan \theta)x$  が与えられている。

ここで、 $p > 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  とする。

いま、傾きが  $\alpha$  の直線  $l$  を対称軸とする対称移動を行うと、原点 O は直線  $y=1$  の、第 1 象限の点 Q に移り、y 軸上の点 P は直線  $m$  上の、第 1 象限上の点 R に移った。

(1) このとき、 $\tan \theta$  を  $\alpha$  と  $p$  で表せ。

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し、そのときの  $p$  の値を求めよ。

条件：どのような  $\theta \left( 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$  に対しても、原点を通り直線  $l$  に垂直な

直線は  $y = \left( \tan \frac{\theta}{3} \right) x$  となる。



[ 東京大学 2006 年前期 理科 4 ]



次の条件を満たす組  $(x, y, z)$  を考える。

条件(A) :  $x, y, z$  は正の整数で,  $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$  および  $x \leq y \leq z$  を満たす。

以下の問いに答えよ。

- (1) 条件(A)を満たす  $(x, y, z)$  で,  $y \leq 3$  となるものをすべて求めよ。
- (2) 組  $(a, b, c)$  が条件(A)を満たすとする。このとき, 組  $(b, c, z)$  が条件(A)を満たすような  $z$  が存在することを示せ。
- (3) 条件(A)を満たす組  $(x, y, z)$  は無数に存在することを示せ。





$a_1 = \frac{1}{2}$  とし, 数列  $\{a_n\}$  を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 各  $n=1, 2, 3, \dots$  に対し  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とおく。

$n > 1$  のとき,  $b_n > 2n$  となることを示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$  を求めよ。



[ 東京大学 2006 年前期 理科 6 ]



$x > 0$  を定義域とする関数  $f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$  について、以下の問いに答えよ。

(1) 関数  $y = f(x)$  ( $x > 0$ ) は、実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ。

すなわち、任意の実数  $a$  に対して、 $f(x) = a$  となる  $x > 0$  がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を  $y = g(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) とする。

このとき、定積分  $\int_8^{27} g(x) dx$  を求めよ。

