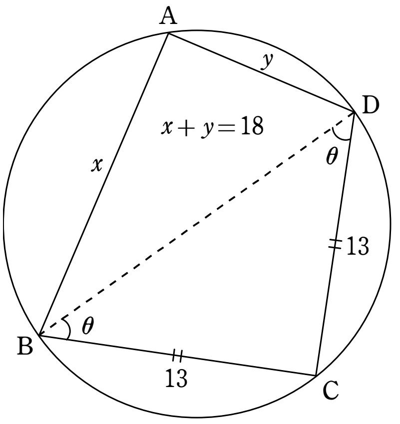
[東京大学 2006 年前期 文科 $\boxed{1}$]

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。



$\mathrm{AB}=x,\ \mathrm{DA}=y$ とおくと

$x+y=44-13\times 2=18$ …①

また，図のように θ を定めると，

正弦定理より $\dfrac{13}{\sin\theta}=2\cdot\dfrac{65}{8}$

よって $\sin\theta=\dfrac{13\cdot 4}{65}=\dfrac{4}{5}$

したがって $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ であるから $\mathrm{BD}=2\cdot 13\cos\theta=2\cdot 13\cdot\dfrac{3}{5}$ …②

また，$\angle\mathrm{A}=\pi-\angle\mathrm{C}=2\theta$ であるから，$\triangle\mathrm{ABD}$ に余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=x^2+y^2-2xy\cos 2\theta\\&=x^2+y^2-2xy(1-2\sin^2\theta)\\&=x^2+y^2+\frac{14}{25}xy\\&=(x+y)^2-\frac{36}{25}xy\\&=18^2-\frac{36}{25}xy\quad\cdots③\end{aligned}$$

②^2＝③ より
$$\begin{aligned}xy&=\frac{5^2}{6^2}\left(18^2-\frac{6^2\cdot 13^2}{5^2}\right)\\&=5^2\cdot 3^2-13^2\\&=15^2-13^2\\&=2\cdot 28\\&=56\quad\cdots④\end{aligned}$$

①，④より $(x,\ y)=(4,14),(14,4)$ であり，$\mathrm{AB}=4,\ \mathrm{DA}=14$ または $\mathrm{AB}=14,\ \mathrm{DA}=4$

[東京大学 2006 年前期 文科 $\boxed{2}$]

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。

このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n，とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) P_3 を p で表せ

(3) $n \geqq 4$ のとき，P_n を p と n で表せ。

(1) ×が 2 個以内のもとで，2 個目の○が出るまでの出方について考えればよい。

「×○○」「××○○」「×○×○」

の 3 通りあるから，求める確率 P_2 は $p(1-p)+p^2(1-p)+(1-p)^3=(1-p)(2p^2-p+1)$

(2) 「×○○○」「××○○○」「×○×○○」「×○○×○」

の 4 通りあるから，求める確率 P_3 は

$$(1-p)p^2+(1-p)p^3+2(1-p)^3p=(1-p)p(3p^2-3p+2)=-3p^4+6p^3-5p^2+2p$$

(3) 次の出方が考えられる。

$\boxed{0}$ $\times\overbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\cdots\cdots\bigcirc}^{n\text{個}}$

$\boxed{1}$ $\times\times\overbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\cdots\cdots\bigcirc\bigcirc}^{n\text{個}}$

$\boxed{2}$ ×○×○………○○

$\boxed{3}$ ×○○×○…… ○○

………

$\boxed{n}$ ×○○○…… ○×○

これら $n+1$ 通りの出方について

$\boxed{0}$の確率は $p^{n-1}(1-p)$，$\boxed{1}$の確率は $p^n(1-p)$，$\boxed{2}$～$\boxed{n}$ の各確率は $(1-p)^3p^{n-2}$

したがって，求める確率 P_n は

$$
\begin{aligned}
(1-p)\{p^{n-1}+p^n+(n-1)(1-p)^2p^{n-2}\} &= (1-p)p^{n-2}\{p+p^2+(n-1)(1-p)^2\} \\
&= (1-p)p^{n-2}\{np^2-(2n-3)p+(n-1)\}
\end{aligned}
$$

[東京大学 2006 年前期 文科 $\boxed{3}$]

n を正の整数とする。実数 $x,\ y,\ z$ に対する方程式

$$x^n + y^n + z^n = xyz \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。

(1) $n=1$ のとき，①を満たす正の整数 $(x,\ y,\ z)$ で， $x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2) $n=3$ のとき，①を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ。

(1) $x+y+z=xyz,\ x \leqq y \leqq z$ のとき

$\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}=1,\ \dfrac{1}{yz} \leqq \dfrac{1}{zx} \leqq \dfrac{1}{xy}$

よって $\dfrac{1}{xy} \geqq \dfrac{1}{3}$ より $xy \leqq 3$

これを満たす $(x,\ y)$ は $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ であり，

方程式は順に $z+2=z,\ z+3=2z,\ x+4=3z$ となる。

この中で 2 番目だけが題意を満たし，求める解は $(1, 2, 3)$

(2) $x^3+y^3+z^3=xyz,\ x \leqq y \leqq z$ のとき

$x^3+y^3+z^3 \leqq z^3$ より $x^3+y^3 \leqq 0$

これを満たす正の実数 $x,\ y$ の組は存在しない。

よって示された。

[東京大学 2006 年前期 文科 $\boxed{4}$]

θ は，$0^\circ < \theta < 45^\circ$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数

$f(x) = |x+1|^3 + |x - \cos 2\theta|^3 + |x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を $\cos\theta$ で表せ。

$\cos 2\theta = c$ とおくと，c は $0 < c < 1$ を満たす定数であり，

$-1 \leqq x \leqq c$ においては $f(x) = (x+1)^3 - (x-c)^3 - (x-1)^3$ …①

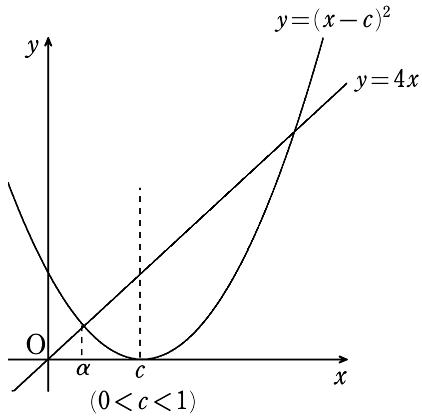
$c \leqq x \leqq 1$ においては $f(x) = (x+1)^3 + (x-c)^3 - (x-1)^3$ …②

である。

①，②をそれぞれ微分すると

$f'(x) = 3(x+1)^2 - 3(x-c)^2 - 3(x-1)^2 = 3\{4x - (x-c)^2\}$ …①´

$f'(x) = 3(x+1)^2 + 3(x-c)^2 - 3(x-1)^2 = 3\{4x + (x-c)^2\}$ …②´



ここで，図のグラフにより

$x \leqq c$ の範囲の①´は $x = \alpha$ の前後で符号を負から正に変える。

したがって，①は $x = \alpha$ で極小かつ最小になる。

また，$x \geqq c$ の範囲の②´は常に正である。

したがって，②は $x = c$ で最小になる。

よって，$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲では，$f(x)$ は $x = \alpha$ で最小になる。

α は 2 次方程式 $(x-c)^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 2(c+2)x + c^2 = 0$ の小さい方の解であるから

求める x の値は $x = c + 2 - \sqrt{(c+2)^2 - c^2}$

$$= c + 2 - \sqrt{4c+4}$$

$$= \cos 2\theta + 2 - 2\sqrt{\cos 2\theta + 1}$$

$$= 2\cos^2\theta - 1 + 2 - 2\sqrt{\cos^2\theta}$$

$$= 2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1$$