[東京大学 2006 年前期 文科 $\boxed{4}$]

θ は，$0^\circ < \theta < 45^\circ$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数

$f(x) = |x+1|^3 + |x - \cos 2\theta|^3 + |x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を $\cos\theta$ で表せ。

$\cos 2\theta = c$ とおくと，c は $0 < c < 1$ を満たす定数であり，

$-1 \leqq x \leqq c$ においては $f(x) = (x+1)^3 - (x-c)^3 - (x-1)^3$ …①

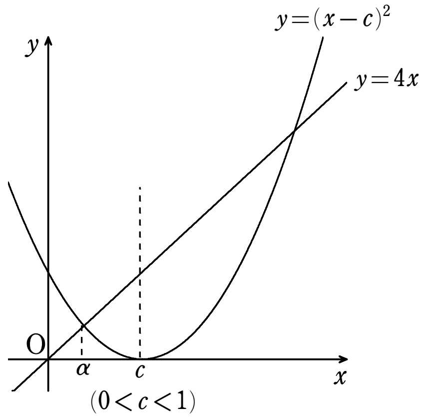
$c \leqq x \leqq 1$ においては $f(x) = (x+1)^3 + (x-c)^3 - (x-1)^3$ …②

である。

①，②をそれぞれ微分すると

$f'(x) = 3(x+1)^2 - 3(x-c)^2 - 3(x-1)^2 = 3\{4x - (x-c)^2\}$ …①´

$f'(x) = 3(x+1)^2 + 3(x-c)^2 - 3(x-1)^2 = 3\{4x + (x-c)^2\}$ …②´



ここで，図のグラフにより

$x \leqq c$ の範囲の①´は $x = \alpha$ の前後で符号を負から正に変える。

したがって，①は $x = \alpha$ で極小かつ最小になる。

また，$x \geqq c$ の範囲の②´は常に正である。

したがって，②は $x = c$ で最小になる。

よって，$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲では，$f(x)$ は $x = \alpha$ で最小になる。

α は 2 次方程式 $(x-c)^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 2(c+2)x + c^2 = 0$ の小さい方の解であるから

求める x の値は $x = c + 2 - \sqrt{(c+2)^2 - c^2}$

$$= c + 2 - \sqrt{4c+4}$$

$$= \cos 2\theta + 2 - 2\sqrt{\cos 2\theta + 1}$$

$$= 2\cos^2\theta - 1 + 2 - 2\sqrt{\cos^2\theta}$$

$$= 2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1$$