

[ 東京大学 2006 年前期 文科 3 ]



$n$  を正の整数とする。実数  $x, y, z$  に対する方程式

$$x^n + y^n + z^n = xyz \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を考える。

- (1)  $n=1$  のとき、 $\textcircled{1}$  を満たす正の整数  $(x, y, z)$  で、 $x \leq y \leq z$  となるものをすべて求めよ。  
 (2)  $n=3$  のとき、 $\textcircled{1}$  を満たす正の実数の組  $(x, y, z)$  は存在しないことを示せ。



- (1)  $x + y + z = xyz, x \leq y \leq z$  のとき

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = 1, \frac{1}{yz} \leq \frac{1}{zx} \leq \frac{1}{xy}$$

よって  $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{3}$  より  $xy \leq 3$

これを満たす  $(x, y)$  は  $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$  であり、

方程式は順に  $z + 2 = z, z + 3 = 2z, x + 4 = 3z$  となる。

この中で 2 番目だけが題意を満たし、求める解は  $(1, 2, 3)$

- (2)  $x^3 + y^3 + z^3 = xyz, x \leq y \leq z$  のとき

$$x^3 + y^3 + z^3 \leq z^3 \quad \text{より} \quad x^3 + y^3 \leq 0$$

これを満たす正の実数  $x, y$  の組は存在しない。

よって示された。