

[東京大学 2006 年前期 文科 2]



コンピュータの画面に、記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。

このとき、各操作で、直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は、それまでの経過に関係なく、 p であるとする。

最初に、コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い、記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に、記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし、記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

- (1) P_2 を p で表せ。
- (2) P_3 を p で表せ
- (3) $n \geq 4$ のとき、 P_n を p と n で表せ。



- (1) ×が 2 個以内のもので、2 個目の○が出るまでの出方について考えればよい。

「×○○」「××○○」「×○×○」

の 3 通りあるから、求める確率 P_2 は $p(1-p) + p^2(1-p) + (1-p)^3 = (1-p)(2p^2 - p + 1)$

- (2) 「×○○○」「××○○○」「×○×○○」「×○○×○」

の 4 通りあるから、求める確率 P_3 は

$$(1-p)p^2 + (1-p)p^3 + 2(1-p)^3 p = (1-p)p(3p^2 - 3p + 2) = -3p^4 + 6p^3 - 5p^2 + 2p$$

- (3) 次の出方が考えられる。

- 0 $\overbrace{\times \circ \circ \cdots \circ}^{n \text{ 個}}$
- 1 $\overbrace{\times \times \circ \circ \cdots \circ \circ}^{n \text{ 個}}$
- 2 $\times \circ \times \circ \cdots \circ \circ$
- 3 $\times \circ \circ \times \circ \cdots \circ \circ$
-
- n $\times \circ \circ \circ \cdots \circ \times \circ$

これら $n+1$ 通りの出方について

$\boxed{0}$ の確率は $p^{n-1}(1-p)$, $\boxed{1}$ の確率は $p^n(1-p)$, $\boxed{2} \sim \boxed{n}$ の各確率は $(1-p)^3 p^{n-2}$

したがって, 求める確率 P_n は

$$\begin{aligned}(1-p)\{p^{n-1} + p^n + (n-1)(1-p)^2 p^{n-2}\} &= (1-p)p^{n-2}\{p + p^2 + (n-1)(1-p)^2\} \\ &= (1-p)p^{n-2}\{np^2 - (2n-3)p + (n-1)\}\end{aligned}$$