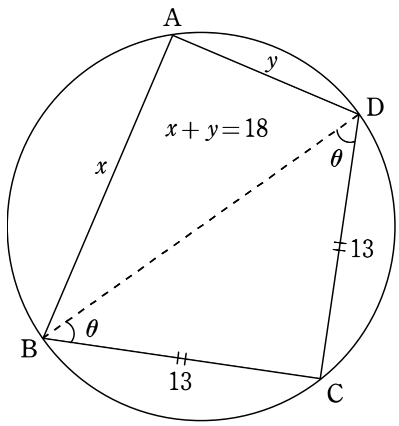
[東京大学 2006 年前期 文科 $\boxed{1}$]

四角形ABCDが，半径$\dfrac{65}{8}$の円に内接している。この四角形の周の長さが44で，辺BCと辺CDの長さがいずれも13であるとき，残りの2辺ABとDAの長さを求めよ。



$\mathrm{AB}=x,\ \mathrm{DA}=y$ とおくと

$x+y=44-13\times 2=18$ …①

また，図のようにθを定めると，

正弦定理より $\dfrac{13}{\sin\theta}=2\cdot\dfrac{65}{8}$

よって $\sin\theta=\dfrac{13\cdot 4}{65}=\dfrac{4}{5}$

したがって $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ であるから $\mathrm{BD}=2\cdot 13\cos\theta=2\cdot 13\cdot\dfrac{3}{5}$ …②

また，$\angle\mathrm{A}=\pi-\angle\mathrm{C}=2\theta$ であるから，△ABDに余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=x^2+y^2-2xy\cos 2\theta\\&=x^2+y^2-2xy(1-2\sin^2\theta)\\&=x^2+y^2+\frac{14}{25}xy\\&=(x+y)^2-\frac{36}{25}xy\\&=18^2-\frac{36}{25}xy\quad\cdots③\end{aligned}$$

②^2＝③ より
$$\begin{aligned}xy&=\frac{5^2}{6^2}\left(18^2-\frac{6^2\cdot 13^2}{5^2}\right)\\&=5^2\cdot 3^2-13^2\\&=15^2-13^2\\&=2\cdot 28\\&=56\quad\cdots④\end{aligned}$$

①，④より $(x,\ y)=(4,14),(14,4)$ であり， $\mathrm{AB}=4,\ \mathrm{DA}=14$ または $\mathrm{AB}=14,\ \mathrm{DA}=4$