[東京大学 2005 年後期 $\boxed{1}$]

xy 平面の原点を O として，2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(1, 0)$ をとる。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。点 A は線分 PQ 上を，また点 B は線分 OQ 上を動き，線分 AB は△OPQ の面積を二等分しているとする。このような線分 AB で最も短いものの長さを ℓ とおき，これを θ の関数と考えて $\ell^2 = f(\theta)$ と表す。

(1) 線分 AQ の長さを a， BQ の長さを b とすると， $ab=\sin\dfrac{\theta}{2}$ が成立することを示せ。

(2) $\mathrm{PQ} \geqq \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{PQ}<\dfrac{1}{2}$ それぞれの場合について， $f(\theta)$ を θ で表せ。

(3) 関数 $f(\theta)$ は $0<\theta<\pi$ で微分可能であることを示し，そのグラフの概形を描け。また， $f(\theta)$ の最大値を求めよ。

---

(1) $\mathrm{PQ}=\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}$

$$=\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

$$=\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$0<\theta<\pi$ より

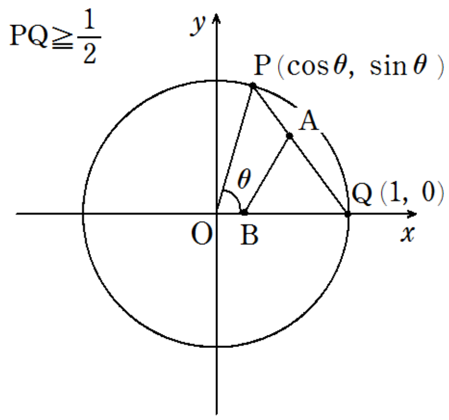
$$=2\sin\frac{\theta}{2} \quad \cdots①$$

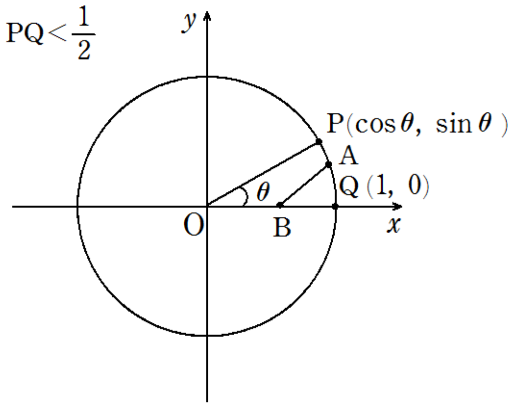
$\triangle\mathrm{QAB}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OPQ}$ より

$$\frac{1}{2}\mathrm{QA}\cdot\mathrm{QB}\sin\angle\mathrm{AQB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{QO}\sin\angle\mathrm{PQO}$$

よって $\mathrm{QA}\cdot\mathrm{QB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{QO}$

したがって，①より $ab=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot 1=\sin\dfrac{\theta}{2} \quad \cdots②$





(2) 余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

$$= a^2 + b^2 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

②より

$$= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{b^2} + b^2 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

相加・相乗平均の関係より

$$\geqq 2\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{b^2}\cdot b^2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \cdots③ \quad \left(\text{等号成立は } b = \sqrt{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ のとき}\right)$$

ここで，$0 < a \leqq \mathrm{PQ}$ であるから①，②より

$$0 < \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{b} \leqq 2\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} \leqq b \leqq 1$$

また，$\frac{1}{2} \leqq \sqrt{\sin\frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leqq \sin\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqq 2\sin\frac{\theta}{2} = \mathrm{PQ}$

よって，$\mathrm{PQ} \geqq \frac{1}{2}$ のときに③で等号が成立し，

$\mathrm{PQ} < \frac{1}{2}$ のとき $\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}} < \frac{1}{2}$ であるから等号は成立しない。

また，$\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{b^2} + b^2$ は $b \geqq \sqrt{\sin\frac{\theta}{2}}$ において単調増加であるから

$b = \frac{1}{2}$，$a = 2\sin\frac{\theta}{2}$ のときに最小となる。

したがって $f(\theta) = \begin{cases} 2\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} & \left(\mathrm{PQ} \geqq \frac{1}{2}\right) \\ 2\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} & \left(\mathrm{PQ} < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$

(3) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}\ \ (0<\alpha<\pi)$ とおくと，(2)より

$0<\theta<\alpha\left(\Leftrightarrow \mathrm{PQ}<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　$f'(\theta)=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=\sin\theta$

$\alpha<\theta<\pi\left(\Leftrightarrow \mathrm{PQ}>\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　$f'(\theta)=\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

したがって，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ と(2)の結果より

$$\lim_{\theta\to\alpha-0} f(\theta)=\frac{3}{8}=f(\alpha)$$

$$\lim_{\theta\to\alpha-0} f'(\theta)=\lim_{\theta\to\alpha+0} f'(\theta)=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

であるから，$f(\theta)$ は $\theta=\alpha$ で連続かつ微分可能である。

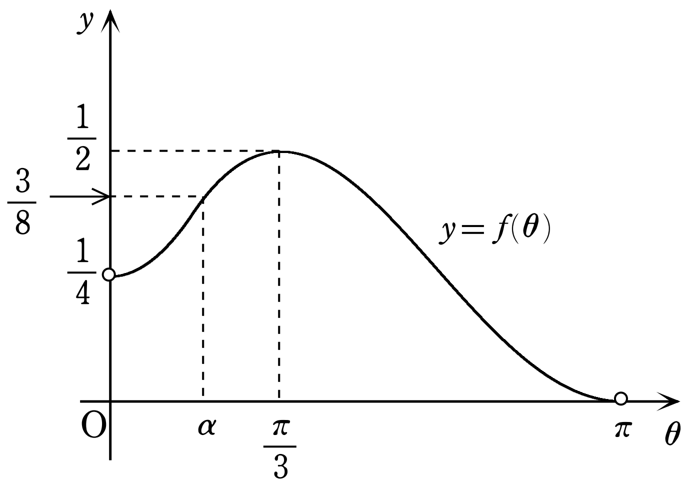
また，$\theta\neq\alpha$ で微分可能なのは明らかである。

よって，$f(\theta)$ は $0<\theta<\pi$ で微分可能である。

さらに，$f(\theta)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	$\dfrac{1}{4}$	↗	$\dfrac{3}{8}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	0

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0} f(\theta)=\frac{1}{4}$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0} f(\theta)=0$ より，グラフの概形は図のようになる。



よって，$f(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大であり，最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

[東京大学 2005 年後期 $\boxed{2}$]

　10 枚のカードに 1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれている。これらのカードを用いた次のようなゲームを考える。r を自然数とする。このゲームは最大 r ラウンドからなり，第 1 ラウンドから始まる。各ラウンドで，プレーヤーは，10 枚のカードから 1 枚のカードを抜き出し，その数を見てから，「停止」または「続行」のいずれかを選択する。「停止」を選択した場合は，そのラウンドでゲームは終了し，最後に抜き出したカードに書かれた数が得点となる。「続行」を選択した場合は，抜き出したカードをもとにもどして，次のラウンドを実行する。最終ラウンドでは，「停止」しか選択できず，そのラウンドで抜き出したカードに書かれた数が得点となる。ただし，各ラウンドで，どのカードも等しい確率 $\dfrac{1}{10}$ で抜き出されるものとする。

　抜き出したカードに書かれた数 x によって「停止」または「続行」を選択する規則を，そのラウンドにおける戦略という。戦略はラウンドごとに，0 または 1 の値をとる関数

$$f(x)\ (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

によって，$f(x)=0$ ならば「続行」，$f(x)=1$ ならば「停止」と定める。

(1) k は $1 \leqq k < 10$ を満たす自然数とする。関数 $f_k(x)$ を $f_k(x)=\begin{cases} 0 & (1 \leqq x \leqq k) \\ 1 & (k < x \leqq 10) \end{cases}$ とする。

　最終ラウンドをのぞくすべてのラウンドで，$f_k(x)$ によって定まる戦略を採用したときの得点の期待値を r と k で表せ。

(2) ラウンド数 r が 2 のとき，得点の期待値が最大となるような，第 1 ラウンドでの戦略を与え，そのときの得点の期待値を求めよ。

(3) ラウンド数 r が 3 のとき，得点の期待値が最大となるような，第 1 ラウンドおよび第 2 ラウンドでの戦略をそれぞれ与え，そのときの得点の期待値を求めよ。

(1) 得点を X とする。すべてのラウンドで $f_k(x)$ 戦略を採用するので

（ｉ）$X=a \quad (a=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ のとき

第 $r-1$ ラウンドまで k 以下のカードを抜き出し，

第 r ラウンドで a のカードを抜き出す場合であるから

$$P(X=a)=\left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}\cdot\frac{1}{10}$$

（ⅱ）$X=a \quad (a=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 10)$ のとき

第 i ラウンド $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ で停止して $X=a$ となるのは，

第 $(i-1)$ ラウンドまで k 以下のカードを抜き出し，

第 i ラウンドで a のカードを抜き出す場合であるから

$$P(X=a)=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{k}{10}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^{r}\right\}$$

よって，求める期待値を E_1 とすると

$$E_1=\sum_{a=1}^{k}a\cdot\left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}\cdot\frac{1}{10}+\sum_{a=k+1}^{10}a\cdot\frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^{r}\right\}$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{k}{10}\right)^{r}+\frac{(k+11)(10-k)}{2}\cdot\frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^{r}\right\}$$

$$=\frac{k+11}{2}-5\left(\frac{k}{10}\right)^{r}$$

(2) まず，第 1 ラウンドでどのような戦略を採用すればよいかを考える。

いま，自然数k $(1\leqq k<10)$ を固定し，1から10までの自然数を，

2 つの集合 $S=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k\}$，$T=\{x_{k+1},\ x_{k+2},\ \cdots,\ x_{10}\}$ （ただし，$S\cap T=\phi$）

に分割し，戦略関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases}0 & (x\in S)\\ 1 & (x\in T)\end{cases}$ と定める。

このとき，(1)と同様に考えると $r=2$ より

$X=a\quad(a\in S)$ となる確率は

$$P(X=a)=\frac{k}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{k}{10^2}$$

$X=a\quad(a\in T)$ となる確率は

$$P(X=a)=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{k}{10}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}+\frac{k}{10^2}$$

であるから，X の期待値E_2は

$$E_2=\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot\frac{k}{10^2}+\sum_{i=k+1}^{10}x_i\left(\frac{1}{10}+\frac{k}{10^2}\right)$$

$$=\frac{k}{10^2}\sum_{i=1}^{k}x_i+\frac{1}{10}\sum_{i=k+1}^{10}x_i$$

ここで，$\displaystyle\sum_{i=1}^{10}x_i=\sum_{i=1}^{10}i$ であるからこの値は定数である。

よって，E_2 が最大 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{10}x_i$ が最大

$\Leftrightarrow$ $x_i=i\quad(i=k+1,\ \cdots,\ 10)$

となり，結局戦略関数として(1)で考えた $f_k(x)$ を採用すればよいことが分かった。

そこで，(1)の結果において $r=2$ とおくと

$$E_2=\frac{k+11}{2}-\frac{k^2}{20}=-\frac{1}{20}(k-5)^2+\frac{27}{4}$$

よって，第 1 ラウンドで採用すべき戦略は $f_5(x)$ であり，このときの期待値は $\dfrac{27}{4}$

[東京大学 2005 年後期 $\boxed{3}$]

---

a は実数で，$-\dfrac{1}{2} \leqq a < 2$ を満たすとする。xy 平面の領域 $D,\ E$ を

$$D:1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ \ E:a \leqq x \leqq a+1$$

で定める。領域 D と E の共通部分の面積を a の関数と考えて $S(a)$ とおく。

(1) $S(a)$ を定積分で表せ。

(2) 導関数 $S'(a)$ を a の関数として求めよ。

(3) $S(a)$ を最大にするような実数 a を解にもつ 4 次方程式

$3x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ （$p,\ q,\ r,\ s$ は整数）を求めよ。

(4) (3)で求めた方程式で，$x = \sqrt{2}\,t$ とおき，さらに $z = t - \dfrac{1}{t}$ とすることにより，この方程式を z についての 2 次方程式として表せ。

(5) $S(a)$ を最大にするような a の値を求めよ。

---

(1) 領域 $D \cap E$ が，x 軸に関して対称であることに注意する。

また，$y \geqq 0$ とすると $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4 \iff \begin{cases} y \leqq \sqrt{4-x^2} \\ y \geqq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$ である。

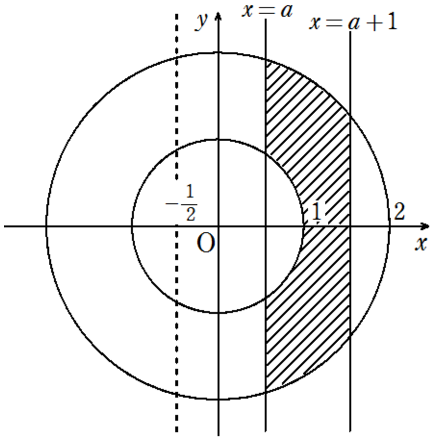
したがって，$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 0$，$0 \leqq a \leqq 1$，$1 \leqq a < 2$ の 3 つの場合に分ける。

(i) $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 0$ のとき

$$S(a) = 2\int_a^{a+1} \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) dx$$

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$S(a) = 2\left(\int_a^{a+1} \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$



$(a \leqq 1 \leqq a+1)$

(iii) $1 \leqq a < 2$ のとき

$$S(a) = 2\int_a^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

(2) (1)の結果より

（ｉ） $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 0$ のとき

$$S'(a)=2\left(\sqrt{4-(a+1)^2}-\sqrt{4-a^2}-\sqrt{1-(a+1)^2}+\sqrt{1-a^2}\right)$$

（ⅱ） $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$S'(a)=2\left(\sqrt{4-(a+1)^2}-\sqrt{4-a^2}+\sqrt{1-a^2}\right)$$

（ⅲ） $1 \leqq a < 2$ のとき

$$S'(a)=-2\sqrt{4-a^2}$$

(3) (ⅲ)の場合，単調減少であるから，(ｉ)(ⅱ)の場合で考えればよい。

（ｉ） $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 0$ のとき

$$f(x)=\sqrt{4-x^2}-\sqrt{1-x^2}=\frac{3}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1-x^2}}$$

とおくと， $f(x)$ は偶関数であり， $0 \leqq x \leqq 1$ において，

x が増加すれば分母が小さくなるので単調増加関数である。

よって， $S'(a)=2\left(f(a+1)-f(a)\right) \geqq 0$ から $S(a) \geqq S(0)$

（ⅱ） $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$S'(a)=2\left(\sqrt{4-(a+1)^2}-f(a)\right)$ であり，

$\sqrt{4-(a+1)^2}$ は a の減少関数であるから， $f(a)$ の単調増加性とから

$S'(a)$ は単調減少である。

また， $S'(0)=2\left(\sqrt{3}-1\right)>0,\ S'(1)=-2\sqrt{3}<0$ であるから

$S'(a)=0$ はただ１つの解 $a=\alpha$ をもつ。

したがって， $S(a)$ の増減は次表に従う。

a	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	極大	↘	

以上，(ⅰ)(ⅱ)より $S(a)$ を最大にする a は $a=\alpha$ であり，このとき

$$\sqrt{4-(\alpha+1)^2}-\sqrt{4-\alpha^2}+\sqrt{1-\alpha^2}=0 \iff \sqrt{4-(\alpha+1)^2}=\sqrt{4-\alpha^2}-\sqrt{1-\alpha^2}$$

両辺を平方すると $4-(\alpha+1)^2=5-2\alpha^2-2\sqrt{(4-\alpha^2)(1-\alpha^2)}$

$$\iff 2\sqrt{(4-\alpha^2)(1-\alpha^2)}=-\alpha^2+2\alpha+2$$

再び両辺を平方数すると $4(4-\alpha^2)(1-\alpha^2)=(\alpha^2-2\alpha-2)^2$

$$\iff 3\alpha^4+4\alpha^3-20\alpha^2-8\alpha+12=0$$

よって，求める 4 次方程式は $3x^4+4x^3-20x^2-8x+12=0$ …①

(4) ①において，$x=\sqrt{2}t$ とおくと

$$12t^4+8\sqrt{2}t^3-40t^2-8\sqrt{2}t+12=0 \iff 3t^4+2\sqrt{2}t^3-10t^2-2\sqrt{2}t+3=0$$

$t\neq 0$ であるから，両辺を t^2 で割ると

$$3\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+2\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-10=0 \iff 3\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-4=0$$

よって，$z=t-\dfrac{1}{t}$ を代入して $3z^2+2\sqrt{2}z-4=0$ …②

(5) $0<\alpha<1$，$x=\sqrt{2}t$ であるから

$0<t<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ よって $z=t-\dfrac{1}{t}<0$

この条件のもとで②を解くと $z=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{14}}{3}$

この値を β とおくと，$x=\sqrt{2}t$ より

$$t-\frac{1}{t}=\beta \iff \frac{\alpha}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\alpha}=\beta$$

よって，$\alpha^2-\sqrt{2}\beta\alpha-2=0 \iff \alpha^2+\dfrac{2\left(1+\sqrt{7}\right)}{3}\alpha-2=0$

$0<\alpha<1$ より $\alpha=-\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}+\sqrt{\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2-1\cdot(-2)}$

$$=\frac{-1-\sqrt{7}+\sqrt{26+2\sqrt{7}}}{3}$$