［ 東京大学 2005 年後期 $\boxed{1}$ ］

xy 平面の原点を O として，2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(1,\ 0)$ をとる。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。点 A は線分 PQ 上を，また点 B は線分 OQ 上を動き，線分 AB は△OPQ の面積を二等分しているとする。このような線分 AB で最も短いものの長さを ℓ とおき，これを θ の関数と考えて $\ell^2 = f(\theta)$ と表す。

(1) 線分 AQ の長さを a，BQ の長さを b とすると，$ab=\sin\dfrac{\theta}{2}$ が成立することを示せ。

(2) $\mathrm{PQ} \geqq \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{PQ} < \dfrac{1}{2}$ それぞれの場合について，$f(\theta)$ を θ で表せ。

(3) 関数 $f(\theta)$ は $0<\theta<\pi$ で微分可能であることを示し，そのグラフの概形を描け。また，$f(\theta)$ の最大値を求めよ。

[東京大学 2005 年後期 $\boxed{2}$]

　10 枚のカードに 1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれている。これらのカードを用いた次のようなゲームを考える。r を自然数とする。このゲームは最大 r ラウンドからなり，第 1 ラウンドから始まる。各ラウンドで，プレーヤーは，10 枚のカードから 1 枚のカードを抜き出し，その数を見てから，「停止」または「続行」のいずれかを選択する。「停止」を選択した場合は，そのラウンドでゲームは終了し，最後に抜き出したカードに書かれた数が得点となる。「続行」を選択した場合は，抜き出したカードをもとにもどして，次のラウンドを実行する。最終ラウンドでは，「停止」しか選択できず，そのラウンドで抜き出したカードに書かれた数が得点となる。ただし，各ラウンドで，どのカードも等しい確率 $\dfrac{1}{10}$ で抜き出されるものとする。

　抜き出したカードに書かれた数 x によって「停止」または「続行」を選択する規則を，そのラウンドにおける戦略という。戦略はラウンドごとに，0 または 1 の値をとる関数

$$f(x)\ (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

によって，$f(x)=0$ ならば「続行」，$f(x)=1$ ならば「停止」と定める。

(1) k は $1\leqq k<10$ を満たす自然数とする。関数 $f_k(x)$ を $f_k(x)=\begin{cases}0 & (1\leqq x\leqq k)\\ 1 & (k<x\leqq 10)\end{cases}$ とする。

　最終ラウンドをのぞくすべてのラウンドで，$f_k(x)$ によって定まる戦略を採用したときの得点の期待値を r と k で表せ。

(2) ラウンド数 r が 2 のとき，得点の期待値が最大となるような，第 1 ラウンドでの戦略を与え，そのときの得点の期待値を求めよ。

(3) ラウンド数 r が 3 のとき，得点の期待値が最大となるような，第 1 ラウンドおよび第 2 ラウンドでの戦略をそれぞれ与え，そのときの得点の期待値を求めよ。

[東京大学 2005 年後期 $\boxed{3}$]

a は実数で，$-\dfrac{1}{2} \leqq a < 2$ を満たすとする。xy 平面の領域 $D,\ E$ を

$$D : 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\quad E : a \leqq x \leqq a+1$$

で定める。領域 D と E の共通部分の面積を a の関数と考えて $S(a)$ とおく。

(1) $S(a)$ を定積分で表せ。

(2) 導関数 $S'(a)$ を a の関数として求めよ。

(3) $S(a)$ を最大にするような実数 a を解にもつ 4 次方程式

$3x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ （$p,\ q,\ r,\ s$ は整数）を求めよ。

(4) (3)で求めた方程式で，$x = \sqrt{2}\,t$ とおき，さらに $z = t - \dfrac{1}{t}$ とすることにより，この方程式を z についての 2 次方程式として表せ。

(5) $S(a)$ を最大にするような a の値を求めよ。