[東京大学 2005 年後期 $\boxed{3}$]

a は実数で，$-\dfrac{1}{2}\leqq a<2$ を満たすとする。xy 平面の領域 $D,\ E$ を

$$D:1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ \ E:a\leqq x\leqq a+1$$

で定める。領域 D と E の共通部分の面積を a の関数と考えて $S(a)$ とおく。

(1) $S(a)$ を定積分で表せ。

(2) 導関数 $S'(a)$ を a の関数として求めよ。

(3) $S(a)$ を最大にするような実数 a を解にもつ 4 次方程式

$3x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ （$p,\ q,\ r,\ s$ は整数）を求めよ。

(4) (3)で求めた方程式で，$x=\sqrt{2}\,t$ とおき，さらに $z=t-\dfrac{1}{t}$ とすることにより，この方程式を z についての 2 次方程式として表せ。

(5) $S(a)$ を最大にするような a の値を求めよ。

---

(1) 領域 $D\cap E$ が，x 軸に関して対称であることに注意する。

また，$y\geqq 0$ とすると $1\leqq x^2+y^2\leqq 4 \iff \begin{cases} y\leqq\sqrt{4-x^2} \\ y\geqq\sqrt{1-x^2} \end{cases}$ である。

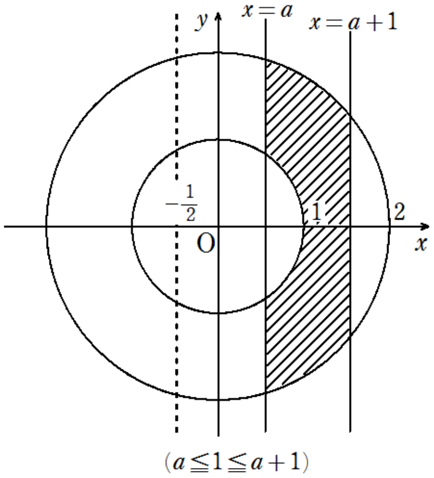
したがって，$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 0$，$0\leqq a\leqq 1$，$1\leqq a<2$ の 3 つの場合に分ける。

(i) $-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 0$ のとき

$$S(a)=2\int_a^{a+1}\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

(ii) $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$S(a)=2\left(\int_a^{a+1}\sqrt{4-x^2}\,dx-\int_a^1\sqrt{1-x^2}\,dx\right)$$



$(a\leqq 1\leqq a+1)$

(iii) $1\leqq a<2$ のとき

$$S(a)=2\int_a^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

(2) (1)の結果より

（ｉ） $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 0$ のとき

$$S'(a) = 2\left(\sqrt{4-(a+1)^2} - \sqrt{4-a^2} - \sqrt{1-(a+1)^2} + \sqrt{1-a^2}\right)$$

（ⅱ） $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$S'(a) = 2\left(\sqrt{4-(a+1)^2} - \sqrt{4-a^2} + \sqrt{1-a^2}\right)$$

（ⅲ） $1 \leqq a < 2$ のとき

$$S'(a) = -2\sqrt{4-a^2}$$

(3) (ⅲ)の場合，単調減少であるから，(ｉ)(ⅱ)の場合で考えればよい。

（ｉ） $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 0$ のとき

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{3}{\sqrt{4-x^2} + \sqrt{1-x^2}}$$

とおくと， $f(x)$ は偶関数であり， $0 \leqq x \leqq 1$ において，

x が増加すれば分母が小さくなるので単調増加関数である。

よって， $S'(a) = 2\left(f(a+1) - f(a)\right) \geqq 0$ から $S(a) \geqq S(0)$

（ⅱ） $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$S'(a) = 2\left(\sqrt{4-(a+1)^2} - f(a)\right)$ であり，

$\sqrt{4-(a+1)^2}$ は a の減少関数であるから， $f(a)$ の単調増加性とから

$S'(a)$ は単調減少である。

また， $S'(0) = 2\left(\sqrt{3}-1\right) > 0,\ S'(1) = -2\sqrt{3} < 0$ であるから

$S'(a) = 0$ はただ 1 つの解 $a = \alpha$ をもつ。

したがって， $S(a)$ の増減は次表に従う。

a	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	極大	↘	

以上，(ⅰ)(ⅱ)より $S(a)$ を最大にするaは $a=\alpha$ であり，このとき

$$\sqrt{4-(\alpha+1)^2}-\sqrt{4-\alpha^2}+\sqrt{1-\alpha^2}=0 \iff \sqrt{4-(\alpha+1)^2}=\sqrt{4-\alpha^2}-\sqrt{1-\alpha^2}$$

両辺を平方すると $4-(\alpha+1)^2=5-2\alpha^2-2\sqrt{(4-\alpha^2)(1-\alpha^2)}$

$$\iff 2\sqrt{(4-\alpha^2)(1-\alpha^2)}=-\alpha^2+2\alpha+2$$

再び両辺を平方数すると $4(4-\alpha^2)(1-\alpha^2)=(\alpha^2-2\alpha-2)^2$

$$\iff 3\alpha^4+4\alpha^3-20\alpha^2-8\alpha+12=0$$

よって，求める 4 次方程式は $3x^4+4x^3-20x^2-8x+12=0$ …①

(4) ①において， $x=\sqrt{2}t$ とおくと

$$12t^4+8\sqrt{2}t^3-40t^2-8\sqrt{2}t+12=0 \iff 3t^4+2\sqrt{2}t^3-10t^2-2\sqrt{2}t+3=0$$

$t\neq 0$ であるから，両辺をt^2で割ると

$$3\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)+2\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-10=0 \iff 3\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-4=0$$

よって， $z=t-\dfrac{1}{t}$ を代入して $3z^2+2\sqrt{2}z-4=0$ …②

(5) $0<\alpha<1$， $x=\sqrt{2}t$ であるから

$0<t<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ よって $z=t-\dfrac{1}{t}<0$

この条件のもとで②を解くと $z=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{14}}{3}$

この値をβとおくと， $x=\sqrt{2}t$ より

$$t-\frac{1}{t}=\beta \iff \frac{\alpha}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\alpha}=\beta$$

よって，$\alpha^2-\sqrt{2}\beta\alpha-2=0 \iff \alpha^2+\dfrac{2\left(1+\sqrt{7}\right)}{3}\alpha-2=0$

$0<\alpha<1$ より $\alpha=-\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}+\sqrt{\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2-1\cdot(-2)}$

$$=\frac{-1-\sqrt{7}+\sqrt{26+2\sqrt{7}}}{3}$$