[東京大学 2005 年後期 $\boxed{3}$]

a は実数で，$-\dfrac{1}{2} \leqq a < 2$ を満たすとする。xy 平面の領域 $D,\ E$ を

$$D : 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\quad E : a \leqq x \leqq a + 1$$

で定める。領域 D と E の共通部分の面積を a の関数と考えて $S(a)$ とおく。

(1) $S(a)$ を定積分で表せ。

(2) 導関数 $S'(a)$ を a の関数として求めよ。

(3) $S(a)$ を最大にするような実数 a を解にもつ 4 次方程式

$3x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ （$p,\ q,\ r,\ s$ は整数）を求めよ。

(4) (3)で求めた方程式で，$x = \sqrt{2}\,t$ とおき，さらに $z = t - \dfrac{1}{t}$ とすることにより，この方程式を z についての 2 次方程式として表せ。

(5) $S(a)$ を最大にするような a の値を求めよ。