[東京大学 2005 年後期 $\boxed{2}$]

10 枚のカードに 1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれている。これらのカードを用いた次のようなゲームを考える。r を自然数とする。このゲームは最大 r ラウンドからなり，第 1 ラウンドから始まる。各ラウンドで，プレーヤーは，10 枚のカードから 1 枚のカードを抜き出し，その数を見てから，「停止」または「続行」のいずれかを選択する。「停止」を選択した場合は，そのラウンドでゲームは終了し，最後に抜き出したカードに書かれた数が得点となる。「続行」を選択した場合は，抜き出したカードをもとにもどして，次のラウンドを実行する。最終ラウンドでは，「停止」しか選択できず，そのラウンドで抜き出したカードに書かれた数が得点となる。ただし，各ラウンドで，どのカードも等しい確率 $\dfrac{1}{10}$ で抜き出されるものとする。

抜き出したカードに書かれた数 x によって「停止」または「続行」を選択する規則を，そのラウンドにおける戦略という。戦略はラウンドごとに，0 または 1 の値をとる関数

$$f(x) \ (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

によって，$f(x)=0$ ならば「続行」，$f(x)=1$ ならば「停止」と定める。

(1) k は $1 \leqq k < 10$ を満たす自然数とする。関数 $f_k(x)$ を $f_k(x)=\begin{cases} 0 & (1 \leqq x \leqq k) \\ 1 & (k < x \leqq 10) \end{cases}$ とする。

最終ラウンドをのぞくすべてのラウンドで，$f_k(x)$ によって定まる戦略を採用したときの得点の期待値を r と k で表せ。

(2) ラウンド数 r が 2 のとき，得点の期待値が最大となるような，第 1 ラウンドでの戦略を与え，そのときの得点の期待値を求めよ。

(3) ラウンド数 r が 3 のとき，得点の期待値が最大となるような，第 1 ラウンドおよび第 2 ラウンドでの戦略をそれぞれ与え，そのときの得点の期待値を求めよ。

(1) 得点を X とする。すべてのラウンドで $f_k(x)$ 戦略を採用するので

（ｉ）$X=a \quad (a=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ のとき

第 $r-1$ ラウンドまで k 以下のカードを抜き出し,

第 r ラウンドで a のカードを抜き出す場合であるから

$$P(X=a)=\left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}\cdot\frac{1}{10}$$

（ⅱ）$X=a \quad (a=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 10)$ のとき

第 i ラウンド $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ で停止して $X=a$ となるのは,

第 $(i-1)$ ラウンドまで k 以下のカードを抜き出し,

第 i ラウンドで a のカードを抜き出す場合であるから

$$P(X=a)=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{k}{10}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^{r}\right\}$$

よって，求める期待値を E_1 とすると

$$E_1=\sum_{a=1}^{k}a\cdot\left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}\cdot\frac{1}{10}+\sum_{a=k+1}^{10}a\cdot\frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^{r}\right\}$$

$$=\frac{k(k+1)}{2}\cdot\frac{1}{k}\left(\frac{k}{10}\right)^{r}+\frac{(k+11)(10-k)}{2}\cdot\frac{1}{10-k}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^{r}\right\}$$

$$=\frac{k+11}{2}-5\left(\frac{k}{10}\right)^{r}$$

(2) まず，第 1 ラウンドでどのような戦略を採用すればよいかを考える。

いま，自然数k $(1\leqq k<10)$ を固定し，1から10までの自然数を，

2 つの集合 $S=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k\}$，$T=\{x_{k+1},\ x_{k+2},\ \cdots,\ x_{10}\}$ （ただし，$S\cap T=\phi$）

に分割し，戦略関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases}0 & (x\in S)\\ 1 & (x\in T)\end{cases}$ と定める。

このとき，(1)と同様に考えると $r=2$ より

$X=a$ $(a\in S)$ となる確率は

$$P(X=a)=\frac{k}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{k}{10^2}$$

$X=a$ $(a\in T)$ となる確率は

$$P(X=a)=\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{k}{10}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}+\frac{k}{10^2}$$

であるから，X の期待値E_2は

$$E_2=\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot\frac{k}{10^2}+\sum_{i=k+1}^{10}x_i\left(\frac{1}{10}+\frac{k}{10^2}\right)$$

$$=\frac{k}{10^2}\sum_{i=1}^{k}x_i+\frac{1}{10}\sum_{i=k+1}^{10}x_i$$

ここで，$\displaystyle\sum_{i=1}^{10}x_i=\sum_{i=1}^{10}i$ であるからこの値は定数である。

よって，E_2 が最大 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{10}x_i$ が最大

$\Leftrightarrow$ $x_i=i$ $(i=k+1,\ \cdots,\ 10)$

となり，結局戦略関数として(1)で考えた $f_k(x)$ を採用すればよいことが分かった。

そこで，(1)の結果において $r=2$ とおくと

$$E_2=\frac{k+11}{2}-\frac{k^2}{20}=-\frac{1}{20}(k-5)^2+\frac{27}{4}$$

よって，第 1 ラウンドで採用すべき戦略は $f_5(x)$ であり，このときの期待値は $\dfrac{27}{4}$