[東京大学 2005 年後期 $\boxed{1}$]

xy 平面の原点を O として，2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(1,\ 0)$ をとる。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。点 A は線分 PQ 上を，また点 B は線分 OQ 上を動き，線分 AB は△OPQ の面積を二等分しているとする。このような線分 AB で最も短いものの長さを ℓ とおき，これを θ の関数と考えて $\ell^2=f(\theta)$ と表す。

(1) 線分 AQ の長さを a， BQ の長さを b とすると， $ab=\sin\dfrac{\theta}{2}$ が成立することを示せ。

(2) $\mathrm{PQ}\geqq\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{PQ}<\dfrac{1}{2}$ それぞれの場合について， $f(\theta)$ を θ で表せ。

(3) 関数 $f(\theta)$ は $0<\theta<\pi$ で微分可能であることを示し，そのグラフの概形を描け。また， $f(\theta)$ の最大値を求めよ。

---

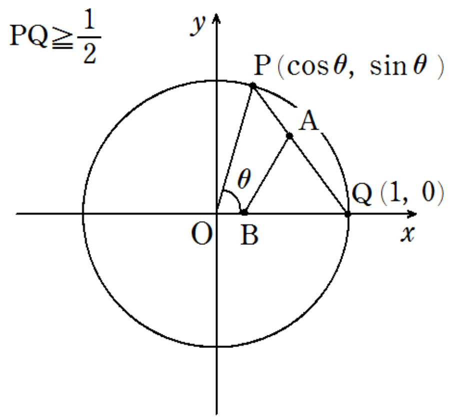
(1) $\mathrm{PQ}=\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}$

$=\sqrt{2(1-\cos\theta)}$

$=\sqrt{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

$0<\theta<\pi$ より

$=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ …①

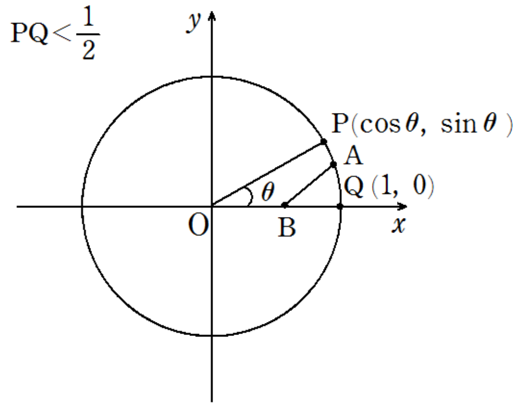


$\triangle\mathrm{QAB}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OPQ}$ より

$\dfrac{1}{2}\mathrm{QA}\cdot\mathrm{QB}\sin\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{QO}\sin\angle\mathrm{PQO}$

よって $\mathrm{QA}\cdot\mathrm{QB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{QO}$

したがって，①より $ab=\dfrac{1}{2}\cdot2\sin\dfrac{\theta}{2}\cdot1=\sin\dfrac{\theta}{2}$ …②



(2) 余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

$$= a^2 + b^2 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

②より

$$= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{b^2} + b^2 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

相加・相乗平均の関係より

$$\geqq 2\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{b^2}\cdot b^2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad \cdots③ \quad \left(\text{等号成立は } b = \sqrt{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ のとき}\right)$$

ここで，$0 < a \leqq \mathrm{PQ}$ であるから①，②より

$$0 < \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{b} \leqq 2\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} \leqq b \leqq 1$$

また，$\frac{1}{2} \leqq \sqrt{\sin\frac{\theta}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leqq \sin\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqq 2\sin\frac{\theta}{2} = \mathrm{PQ}$

よって，$\mathrm{PQ} \geqq \frac{1}{2}$ のときに③で等号が成立し，

$\mathrm{PQ} < \frac{1}{2}$ のとき $\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}} < \frac{1}{2}$ であるから等号は成立しない。

また，$\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{b^2} + b^2$ は $b \geqq \sqrt{\sin\frac{\theta}{2}}$ において単調増加であるから

$b = \frac{1}{2}$，$a = 2\sin\frac{\theta}{2}$ のときに最小となる。

したがって

$$f(\theta) = \begin{cases} 2\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} & \left(\mathrm{PQ} \geqq \frac{1}{2}\right) \\ 2\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} & \left(\mathrm{PQ} < \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

(3) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}$ $(0<\alpha<\pi)$ とおくと，(2)より

$0<\theta<\alpha\left(\Leftrightarrow \mathrm{PQ}<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　$f'(\theta)=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=\sin\theta$

$\alpha<\theta<\pi\left(\Leftrightarrow \mathrm{PQ}>\dfrac{1}{2}\right)$ のとき　$f'(\theta)=\cos\dfrac{\theta}{2}\left(1-2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$

したがって，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ と(2)の結果より

$$\lim_{\theta\to\alpha-0} f(\theta)=\frac{3}{8}=f(\alpha)$$

$$\lim_{\theta\to\alpha-0} f'(\theta)=\lim_{\theta\to\alpha+0} f'(\theta)=\frac{\sqrt{15}}{8}$$

であるから，$f(\theta)$ は $\theta=\alpha$ で連続かつ微分可能である。

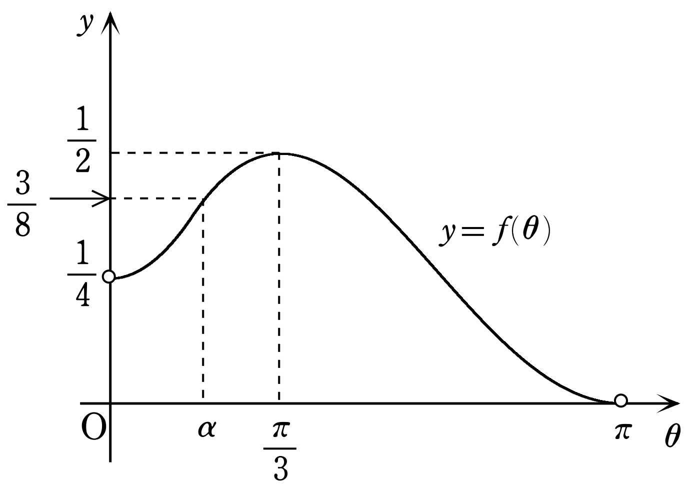
また，$\theta\neq\alpha$ で微分可能なのは明らかである。

よって，$f(\theta)$ は $0<\theta<\pi$ で微分可能である。

さらに，$f(\theta)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	$\dfrac{1}{4}$	↗	$\dfrac{3}{8}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	0

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0} f(\theta)=\frac{1}{4}$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0} f(\theta)=0$ より，グラフの概形は図のようになる。



よって，$f(\theta)$ は $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大であり，最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$