[東京大学 2005 年後期 $\boxed{1}$]

xy 平面の原点を O として，2 点 P$(\cos\theta, \sin\theta)$, Q$(1, 0)$ をとる。ただし，$0 < \theta < \pi$ とする。点 A は線分 PQ 上を，また点 B は線分 OQ 上を動き，線分 AB は△OPQ の面積を二等分しているとする。このような線分 AB で最も短いものの長さを ℓ とおき，これを θ の関数と考えて $\ell^2 = f(\theta)$ と表す。

(1) 線分 AQ の長さを a，BQ の長さを b とすると，$ab = \sin\dfrac{\theta}{2}$ が成立することを示せ。

(2) $\mathrm{PQ} \geqq \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{PQ} < \dfrac{1}{2}$ それぞれの場合について，$f(\theta)$ を θ で表せ。

(3) 関数 $f(\theta)$ は $0 < \theta < \pi$ で微分可能であることを示し，そのグラフの概形を描け。また，$f(\theta)$ の最大値を求めよ。