[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{1}$]

$x>0$ に対し $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を用いて

$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを示し，$a_n,\ b_n$ に関する漸化式を求めよ。

(2) $h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて $a_n,\ b_n$ の一般項を求めよ。

---

(1) $f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ であることを数学的帰納法によって示す。

(ⅰ) $n=1$ のとき

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$ より $a_1=1,\ b_1=-1$ となっていて成り立つ。

(ⅱ) $n=k$ のとき

$f^{(k)}(x)=\dfrac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$ が成り立つとする。

このとき，
$$f^{(k+1)}(x)=\frac{\frac{b_k}{x}\cdot x^{k+1}-(a_k+b_k\log x)\cdot(k+1)x^k}{(x^{k+1})^2}$$
$$=\frac{b_k-(a_k+b_k\log x)\cdot(k+1)}{x^{k+2}}$$
$$=\frac{b_k-(k+1)a_k-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}$$

よって，$a_{k+1}=b_k-(k+1)a_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とおけば

$f^{(k+1)}(x)=\dfrac{a_{k+1}+b_{k+1}\log x}{x^{k+2}}$ と表され，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(ⅰ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって題意は示された。

このとき，$\begin{cases} a_{n+1}=b_n-(n+1)a_n \\ b_{n+1}=-(n+1)b_n \end{cases}$ である。

（2）$a_{n+1}=b_n-(n+1)a_n$ …①，$b_{n+1}=-(n+1)b_n$ …②

②の両辺を $(n+1)!$ で割ると $\dfrac{b_{n+1}}{(n+1)!}=-\dfrac{b_n}{n!}$ となるので，

$\dfrac{b_n}{n!}=(-1)^{n-1}\dfrac{b_1}{1!}=(-1)^n$ すなわち $b_n=(-1)^n n!$ …③ を得る。

③を①に代入して

$a_{n+1}=(-1)^n n!-(n+1)a_n$

両辺を $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{a_n}{(-1)^n n!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=\dfrac{a_n}{(-1)^n n!}-\dfrac{1}{n+1}$ となるので

$n \geqq 2$ に対し，$\dfrac{a_n}{(-1)^n n!}=\dfrac{a_1}{(-1)^1 1!}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$$=-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$=-h_n$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって $a_n=(-1)^{n+1}n!h_n$ となる。

以上より $a_n=(-1)^{n+1}n!h_n$，$b_n=(-1)^n n!$

[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{2}$]

$|z| > \dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち，$T = \left\{ w \mid w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leqq \dfrac{5}{4} \right\}$ とする。

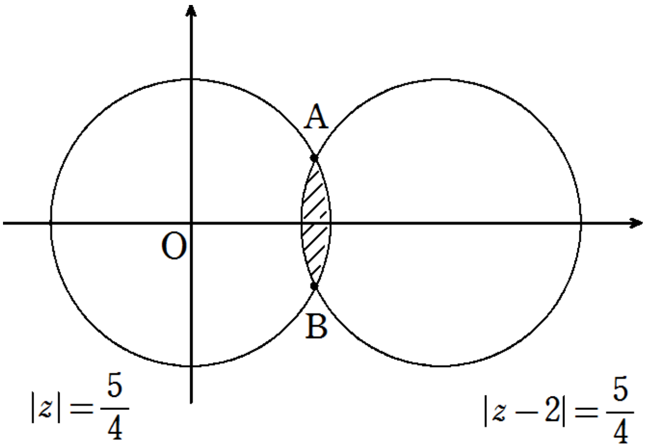
このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。

2 次方程式 $w = z^2 - 2z$ の 2 解を α, β とすると，

解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = -w$

このとき，$w \in T$ が成り立つとは $|\alpha| \leqq \dfrac{5}{4},\ |\beta| \leqq \dfrac{5}{4}$ が成り立つことである。

$\beta = 2 - \alpha$ であるから $|\alpha| \leqq \dfrac{5}{4},\ |\alpha - 2| \leqq \dfrac{5}{4}$ となる。



よって，α の存在範囲は図の斜線部分（境界も含む）であり，β についても同様であるから

点 z の存在範囲はこの斜線部分である。

$|w| = |z^2 - 2z| = |z||z-2|$ であり，図より $|z| \leqq \dfrac{5}{4},\ |z-2| \leqq \dfrac{5}{4}$ である。

これらの等号がともに成立するのは，点 z が図の点 A または点 B にあるときで，

$z = 1 \pm \dfrac{3}{4}i$ となり，このとき $|w|$ が最大となる。

求める w の値は $w = z^2 - 2z = -\dfrac{25}{16}$

[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{3}$]

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。

$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ。

---

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2}\{1+e^{-2(x-1)}\}+\frac{1}{2}x\{-2e^{-2(x-1)}\}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)}$$

$$f''(x)=-e^{-2(x-1)}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\cdot\{-2e^{-2(x-1)}\}=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$ であり，

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，$f'(1)=0$ なので，$f'(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)}\right\}=\frac{1}{2}$$

したって，$x>\dfrac{1}{2}$ において $0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ が成り立つ。

(2) (1)より $x>\dfrac{1}{2}$ のとき $f'(x) \geqq 0$ であるから，$f(x)$ は $x>\dfrac{1}{2}$ において単調増加である。

したがって，$x_n>\dfrac{1}{2}$ であるとすると，$x_{n+1}=f(x_n)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1+e}{4}>\dfrac{1}{2}$ となる。

よって，$x_0>\dfrac{1}{2}$ であることから帰納的に $x_n>\dfrac{1}{2}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ となる。

ここで，平均値の定理より

$f(x_n)-f(1)=f'(c)(x_n-1)$ を満たす実数 c が $x_n\left(>\dfrac{1}{2}\right)$ と 1 の間に存在する。

$f(x_n)=x_{n+1}$，$f(1)=1$ であるから $x_{n+1}-1=f'(c)(x_n-1)$ となり，

$f'(c)<\dfrac{1}{2}$ であるから $|x_{n+1}-1|<\dfrac{1}{2}|x_n-1|$ （$n \geqq 0$ ）が成り立つ。

したがって $|x_n-1|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|x_0-1|$ が成り立ち，

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|x_0-1|=0$ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty}|x_n-1|=0$ である。

よって $\lim_{n\to\infty}x_n=1$ が成り立つ。

［ 東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{4}$ ］

3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

$a^2-a=a(a-1)$ であり，$a,\ a-1$ は連続する 2 整数であるから偶奇が異なるので互いに素である。

よって，これらの積 $a(a-1)$ が $10000=2^4\times5^4$ で割り切れるためには

奇数 a は 5^4 の倍数であり，かつ偶数 $a-1$ は 2^4 の倍数でなければならない。

このとき，$a=5^4m$，$a-1=2^4n$（$m,\ n$ は整数）…① とおくことができる。

a は 3 以上 9999 以下の奇数であるから，m は $1\leqq m\leqq15$ を満たす奇数 …② である。

さらに，$m,\ n$ は①より $625m-1=16n \Leftrightarrow 625(m-1)=16(n-39)$ を満たすので，

$m-1$ は 16 の倍数である。②よりこれを満たす m は $m=1$ のみである。

よって，$a=625$ のみが求めるものである。

［注］$625m-1=16n \Leftrightarrow 625m-16n=1$ …③

であり，$625=16\times39+1$ より $625\times1-16\times39=1$ …④ なので

③－④より $625(m-1)-16(n-39)=0 \Leftrightarrow 625(m-1)=16(n-39)$ となる。

[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{5}$]

N を 1 以上の整数とする。数字 $1, 2, \cdots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ，計 N 枚用意し，甲，乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

（ i ）甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。

（ ii ）甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は，そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は， $b=0$ とする。 $a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

（iii） $a+b\leqq N$ の場合は，乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。 $a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

（iv） $a+b\geqq c$ の場合は，乙はもう 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。 $a+b<c+d\leqq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

（iii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを， a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし，各カードがひかれる確率は等しいものとする。

このゲームの流れは次の図の通りである。

$a+b>N$ （乙の勝ち）

$$\begin{tikzcd} a+b\leqq N \arrow[r] \arrow[dr] & a+b<c\ \text{（乙の勝ち）} & \\ & a+b\geqq c \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & a+b<c+d\leqq N\ \text{（乙の勝ち）} \\ & & c+d\leqq a+b\leqq N\ \text{（甲の勝ち）} \\ & & a+b\leqq N<c+d\ \text{（甲の勝ち）} \end{tikzcd}$$

(1) 甲が 2 回目にカードをひかないとき， $b=0$ であるから，甲が勝つのは

『$c\leqq a\leqq N$ かつ 「$c+d\leqq a\leqq N$ または $a\leqq N<c+d$」』のときである。

c の定め方は a 通りあり， c を固定したとき， d の定め方は

$d \leqq a-c$ のときは $a-c$ 通り，

$d > N-c$ のときは $N-(N-c)=c$ 通りあるので，

求める確率は $\dfrac{1}{N}\times\dfrac{a}{N}\times\dfrac{(a-c)+c}{N}=\dfrac{a^2}{N^3}$

(2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき，

$a+b \leqq N \iff b \leqq N-a$ となる b の定め方は $N-a$ 通り。

b を固定したとき，甲が勝つのは

『$c \leqq a+b$ かつ 「$c+d \leqq a+b \leqq N$ または $a+b \leqq N < c+d$ 」』のときであり，

$1 \leqq c \leqq a+b$ で c を固定すると，d の定め方は

$d \leqq a+b-c$ のときは $a+b-c$ 通り，

$d > N-c$ のときは $N-(N-c)=c$ 通りあるので，

$(c,\ d)$ の定め方は $(a+b)\times\{(a+b-c)+c\}=(a+b)^2$ 通りある。

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}\sum_{b=1}^{N-a}\frac{1}{N}\cdot\frac{(a+b)^2}{N^2}&=\frac{1}{N^3}\sum_{k=a+1}^{N}k^2\\&=\frac{1}{N^3}\left(\sum_{k=1}^{N}k^2-\sum_{k=1}^{a}k^2\right)\\&=\frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6N^3}\end{aligned}$$

[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{6}$]

r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2 \leqq r^2,\ y^2+z^2 \geqq r^2,\ z^2+x^2 \leqq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。

題意の立体を平面 $x=t\ \ (0 \leqq t \leqq r)$ で切断したときの切り口は

「$t^2+y^2 \leqq r^2$ かつ $y^2+z^2 \geqq r^2$ かつ $z^2+t^2 \leqq r^2$」

すなわち

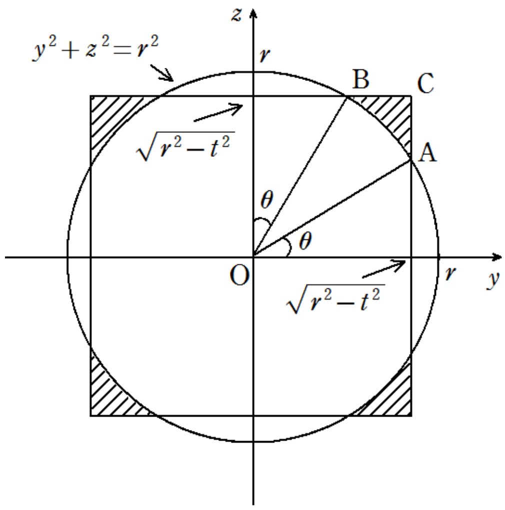
「$-\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2}$ かつ $-\sqrt{r^2-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2-t^2}$ かつ $z^2+t^2 \leqq r^2$」

を満たす。

これを満たす点 $(x,\ y,\ z)$ が存在するための条件は $\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2} \geqq r$ より $0 \leqq t \leqq \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ である。

切り口の図形を yz 平面に正射影した図は右図のようになり，

その面積を S，角 θ を図のように定めると，



$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{AB}-（扇形\mathrm{OAB}）$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2}\times\sqrt{2}\left(\sqrt{r^2-t^2}-t\right)-\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

ここで，$t=r\sin\theta$ より

$$=r\cos\theta\left(r\cos\theta-r\sin\theta\right)-\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ より $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ であり，求める体積を V とすると，対称性を考えて

$$V=2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} S\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} S\frac{dt}{d\theta}d\theta$$

$$=2r^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{4\cos\theta\left(\cos\theta-\sin\theta\right)-\left(\pi-4\theta\right)\right\}r\cos\theta\,d\theta$$

$$=2r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{4\cos^3\theta-4\cos^2\theta\sin\theta-\left(\pi-4\theta\right)\cos\theta\right\}d\theta$$

$$= 2r^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ 4\left(\frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta \right) - 4\cos^2\theta\sin\theta - (\pi - 4\theta)\cos\theta \right\} d\theta$$

$$= 2r^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \cos 3\theta + 3\cos\theta - 4\cos^2\theta\sin\theta - (\pi - 4\theta)\cos\theta \right\} d\theta$$

$$= 2r^3 \left[\frac{1}{3}\sin 3\theta + 3\sin\theta + \frac{4}{3}\cos^3\theta - \pi\sin\theta + 4(\theta\sin\theta + \cos\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2r^3 \left\{ \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{4}{3} + 4 \right) \right\}$$

$$= 2r^3 \left(4\sqrt{2} - \frac{16}{3} \right)$$

$$= \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3} \right) r^3$$

となる。