［ 東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{6}$ ］

r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2 \leqq r^2,\ y^2+z^2 \geqq r^2,\ z^2+x^2 \leqq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。

題意の立体を平面 $x=t\ \ (0 \leqq t \leqq r)$ で切断したときの切り口は

「$t^2+y^2 \leqq r^2$ かつ $y^2+z^2 \geqq r^2$ かつ $z^2+t^2 \leqq r^2$」

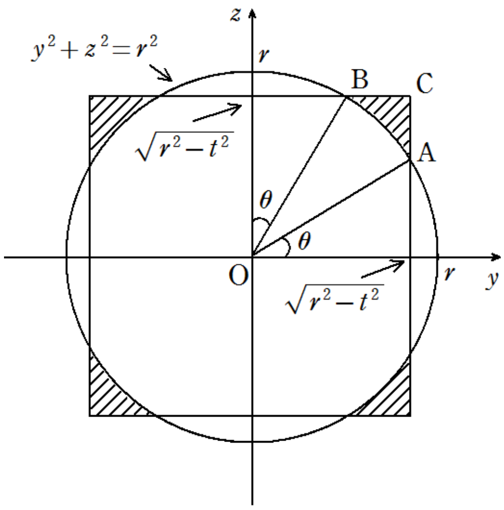
すなわち

「$-\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2}$ かつ $-\sqrt{r^2-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2-t^2}$ かつ $z^2+t^2 \leqq r^2$」

を満たす。

これを満たす点 $(x,\ y,\ z)$ が存在するための条件は $\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2} \geqq r$ より $0 \leqq t \leqq \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ である。

切り口の図形を yz 平面に正射影した図は右図のようになり，



その面積を S，角 θ を図のように定めると，

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\mathrm{OC}\cdot\mathrm{AB}-\text{（扇形 OAB）}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2}\times\sqrt{2}\left(\sqrt{r^2-t^2}-t\right)-\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

ここで，$t=r\sin\theta$ より

$$=r\cos\theta\left(r\cos\theta-r\sin\theta\right)-\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ より $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ であり，求める体積を V とすると，対称性を考えて

$$V=2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} S\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} S\frac{dt}{d\theta}\,d\theta$$

$$=2r^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{4\cos\theta\left(\cos\theta-\sin\theta\right)-\left(\pi-4\theta\right)\right\}r\cos\theta\,d\theta$$

$$=2r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{4\cos^3\theta-4\cos^2\theta\sin\theta-\left(\pi-4\theta\right)\cos\theta\right\}d\theta$$

$$= 2r^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ 4\left(\frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta \right) - 4\cos^2\theta \sin\theta - (\pi - 4\theta)\cos\theta \right\} d\theta$$

$$= 2r^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \cos 3\theta + 3\cos\theta - 4\cos^2\theta \sin\theta - (\pi - 4\theta)\cos\theta \right\} d\theta$$

$$= 2r^3 \left[\frac{1}{3}\sin 3\theta + 3\sin\theta + \frac{4}{3}\cos^3\theta - \pi\sin\theta + 4(\theta\sin\theta + \cos\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2r^3 \left\{ \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{4}{3} + 4 \right) \right\}$$

$$= 2r^3 \left(4\sqrt{2} - \frac{16}{3} \right)$$

$$= \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3} \right) r^3$$

となる。