[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{5}$]

N を 1 以上の整数とする。数字$1,\ 2,\ \cdots,\ N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ，計 N 枚用意し，甲，乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

（ｉ）甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。

（ii）甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は，そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は，$b=0$ とする。$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

（iii）$a+b \leqq N$ の場合は，乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

（iv）$a+b \geqq c$ の場合は，乙はもう 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。$a+b<c+d \leqq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(iii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし，各カードがひかれる確率は等しいものとする。

このゲームの流れは次の図の通りである。

$a+b>N$ （乙の勝ち）

$a+b \leqq N$ $\to$ $a+b<c$（乙の勝ち）

$a+b \leqq N$ $\to$ $a+b \geqq c$ $\to$ $a+b<c+d \leqq N$ （乙の勝ち）

$a+b \geqq c$ $\to$ $c+d \leqq a+b \leqq N$ （甲の勝ち）

$a+b \geqq c$ $\to$ $a+b \leqq N<c+d$ （甲の勝ち）

(1) 甲が 2 回目にカードをひかないとき，$b=0$ であるから，甲が勝つのは

『$c \leqq a \leqq N$ かつ 「$c+d \leqq a \leqq N$ または $a \leqq N<c+d$」』のときである。

c の定め方は a 通りあり，c を固定したとき，d の定め方は

$d \leqq a-c$ のときは $a-c$ 通り，

$d > N-c$ のときは $N-(N-c)=c$ 通りあるので，

求める確率は $\dfrac{1}{N}\times\dfrac{a}{N}\times\dfrac{(a-c)+c}{N}=\dfrac{a^2}{N^3}$

(2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき，

$a+b \leqq N \Leftrightarrow b \leqq N-a$ となる b の定め方は $N-a$ 通り。

b を固定したとき，甲が勝つのは

『$c \leqq a+b$ かつ 「$c+d \leqq a+b \leqq N$ または $a+b \leqq N < c+d$」』のときであり，

$1 \leqq c \leqq a+b$ で c を固定すると，d の定め方は

$d \leqq a+b-c$ のときは $a+b-c$ 通り，

$d > N-c$ のときは $N-(N-c)=c$ 通りあるので，

$(c,\ d)$ の定め方は $(a+b)\times\{(a+b-c)+c\}=(a+b)^2$ 通りある。

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}\sum_{b=1}^{N-a}\frac{1}{N}\cdot\frac{(a+b)^2}{N^2}&=\frac{1}{N^3}\sum_{k=a+1}^{N}k^2\\&=\frac{1}{N^3}\left(\sum_{k=1}^{N}k^2-\sum_{k=1}^{a}k^2\right)\\&=\frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6N^3}\end{aligned}$$