

[東京大学 2005 年前期 理科 5]



N を 1 以上の整数とする。数字 $1, 2, \dots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ、計 N 枚用意し、甲、乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

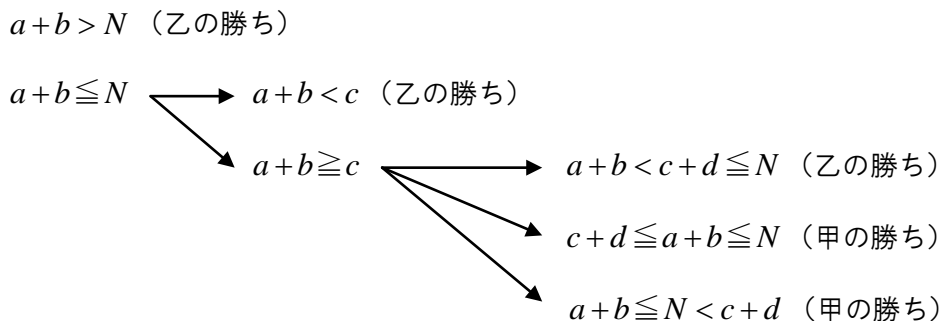
- (i) 甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。
- (ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は、そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は、 $b=0$ とする。 $a+b > N$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iii) $a+b \leq N$ の場合は、乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。 $a+b < c$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。
- (iv) $a+b \geq c$ の場合は、乙はもう 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。 $a+b < c+d \leq N$ の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(iii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、 a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。
 - (2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。
- ただし、各カードがひかれる確率は等しいものとする。



このゲームの流れは次の図の通りである。



- (1) 甲が 2 回目にカードをひかないとき、 $b=0$ であるから、甲が勝つのは『 $c \leq a \leq N$ かつ 「 $c+d \leq a \leq N$ または $a \leq N < c+d$ 」』のときである。
 c の定め方は a 通りあり、 c を固定したとき、 d の定め方は

$d \leq a - c$ のときは $a - c$ 通り,

$d > N - c$ のときは $N - (N - c) = c$ 通りあるので,

$$\text{求める確率は } \frac{1}{N} \times \frac{a}{N} \times \frac{(a-c)+c}{N} = \frac{a^2}{N^3}$$

(2) 甲が2回目にカードをひくことにしたとき,

$a + b \leq N \Leftrightarrow b \leq N - a$ となる b の定め方は $N - a$ 通り。

b を固定したとき, 甲が勝つのは

『 $c \leq a + b$ かつ 「 $c + d \leq a + b \leq N$ または $a + b \leq N < c + d$ 」』 のときであり,

$1 \leq c \leq a + b$ で c を固定すると, d の定め方は

$d \leq a + b - c$ のときは $a + b - c$ 通り,

$d > N - c$ のときは $N - (N - c) = c$ 通りあるので,

(c, d) の定め方は $(a + b) \times \{(a + b - c) + c\} = (a + b)^2$ 通りある。

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{N-a} \frac{1}{N} \cdot \frac{(a+b)^2}{N^2} &= \frac{1}{N^3} \sum_{k=a+1}^N k^2 \\ &= \frac{1}{N^3} \left(\sum_{k=1}^N k^2 - \sum_{k=1}^a k^2 \right) \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1)}{6N^3} \end{aligned}$$