[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{4}$]

3 以上 9999 以下の奇数aで，a^2-aが 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

$a^2-a=a(a-1)$ であり，$a,\ a-1$は連続する 2 整数であるから偶奇が異なるので互いに素である。

よって，これらの積 $a(a-1)$ が $10000=2^4\times5^4$ で割り切れるためには

奇数aは5^4の倍数であり，かつ偶数$a-1$は2^4の倍数でなければならない。

このとき，$a=5^4m$，$a-1=2^4n$（$m,\ n$は整数）…① とおくことができる。

aは 3 以上 9999 以下の奇数であるから，mは $1\leqq m\leqq15$ を満たす奇数 …② である。

さらに，$m,\ n$は①より $625m-1=16n \Leftrightarrow 625(m-1)=16(n-39)$ を満たすので，

$m-1$は16の倍数である。②よりこれを満たすmは $m=1$ のみである。

よって，$a=625$ のみが求めるものである。

［注］$625m-1=16n \Leftrightarrow 625m-16n=1$ …③

であり，$625=16\times39+1$ より $625\times1-16\times39=1$ …④ なので

③－④より $625(m-1)-16(n-39)=0 \Leftrightarrow 625(m-1)=16(n-39)$ となる。