[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{3}$]

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。

$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ。

---

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2}\{1+e^{-2(x-1)}\}+\frac{1}{2}x\{-2e^{-2(x-1)}\}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)}$$

$$f''(x)=-e^{-2(x-1)}+\left(\frac{1}{2}-x\right)\cdot\{-2e^{-2(x-1)}\}=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$ であり，

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，$f'(1)=0$ なので，$f'(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$ であるから

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)}\right\}=\frac{1}{2}$$

したがって，$x>\dfrac{1}{2}$ において $0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ が成り立つ。

(2) (1)より $x > \dfrac{1}{2}$ のとき $f'(x) \geqq 0$ であるから，$f(x)$ は $x > \dfrac{1}{2}$ において単調増加である。

したがって，$x_n > \dfrac{1}{2}$ であるとすると，$x_{n+1} = f(x_n) > f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1+e}{4} > \dfrac{1}{2}$ となる。

よって，$x_0 > \dfrac{1}{2}$ であることから帰納的に $x_n > \dfrac{1}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ となる。

ここで，平均値の定理より

$f(x_n) - f(1) = f'(c)(x_n - 1)$ を満たす実数 c が $x_n \left(> \dfrac{1}{2} \right)$ と 1 の間に存在する。

$f(x_n) = x_{n+1}$，$f(1) = 1$ であるから $x_{n+1} - 1 = f'(c)(x_n - 1)$ となり，

$f'(c) < \dfrac{1}{2}$ であるから $|x_{n+1} - 1| < \dfrac{1}{2}|x_n - 1|$（$n \geqq 0$）が成り立つ。

したがって $|x_n - 1| < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |x_0 - 1|$ が成り立ち，

$\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |x_0 - 1| = 0$ より，はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} |x_n - 1| = 0$ である。

よって $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ が成り立つ。