[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{2}$]

$|z|>\dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w=z^2-2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち，$T=\left\{w \mid w=z^2-2z \text{ ならば } |z| \leqq \dfrac{5}{4}\right\}$ とする。

このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。

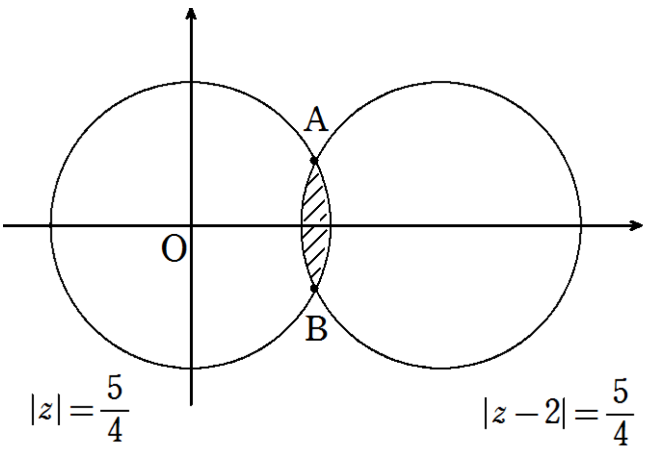
---

2 次方程式 $w=z^2-2z$ の 2 解を α, β とすると，

解と係数の関係より $\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-w$

このとき，$w \in T$ が成り立つとは $|\alpha| \leqq \dfrac{5}{4},\ |\beta| \leqq \dfrac{5}{4}$ が成り立つことである。

$\beta=2-\alpha$ であるから $|\alpha| \leqq \dfrac{5}{4},\ |\alpha-2| \leqq \dfrac{5}{4}$ となる。



よって，α の存在範囲は図の斜線部分（境界も含む）であり，β についても同様であるから

点 z の存在範囲はこの斜線部分である。

$|w|=|z^2-2z|=|z||z-2|$ であり，図より $|z| \leqq \dfrac{5}{4},\ |z-2| \leqq \dfrac{5}{4}$ である。

これらの等号がともに成立するのは，点 z が図の点 A または点 B にあるときで，

$z=1\pm\dfrac{3}{4}i$ となり，このとき $|w|$ が最大となる。

求める w の値は $w=z^2-2z=-\dfrac{25}{16}$