[東京大学 2005 年前期 理科 $\boxed{1}$]

★―――★

$x>0$ に対し $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を用いて

$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを示し，$a_n,\ b_n$ に関する漸化式を求めよ。

(2) $h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて $a_n,\ b_n$ の一般項を求めよ。

★―――★

(1) $f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ であることを数学的帰納法によって示す。

(ⅰ) $n=1$ のとき

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$ より $a_1=1,\ b_1=-1$ となっていて成り立つ。

(ⅱ) $n=k$ のとき

$f^{(k)}(x)=\dfrac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$ が成り立つとする。

このとき，
$$f^{(k+1)}(x)=\frac{\frac{b_k}{x}\cdot x^{k+1}-(a_k+b_k\log x)\cdot(k+1)x^k}{(x^{k+1})^2}$$
$$=\frac{b_k-(a_k+b_k\log x)\cdot(k+1)}{x^{k+2}}$$
$$=\frac{b_k-(k+1)a_k-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}$$

よって，$a_{k+1}=b_k-(k+1)a_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とおけば

$f^{(k+1)}(x)=\dfrac{a_{k+1}+b_{k+1}\log x}{x^{k+2}}$ と表され，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(ⅰ)(ⅱ)より，数学的帰納法によって題意は示された。

このとき，$\begin{cases} a_{n+1}=b_n-(n+1)a_n \\ b_{n+1}=-(n+1)b_n \end{cases}$ である。

（2） $a_{n+1}=b_n-(n+1)a_n$ …①， $b_{n+1}=-(n+1)b_n$ …②

②の両辺を $(n+1)!$ で割ると $\dfrac{b_{n+1}}{(n+1)!}=-\dfrac{b_n}{n!}$ となるので，

$\dfrac{b_n}{n!}=(-1)^{n-1}\dfrac{b_1}{1!}=(-1)^n$ すなわち $b_n=(-1)^n n!$ …③ を得る。

③を①に代入して

$a_{n+1}=(-1)^n n!-(n+1)a_n$

両辺を $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割ると $\dfrac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{a_n}{(-1)^n n!}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=\dfrac{a_n}{(-1)^n n!}-\dfrac{1}{n+1}$ となるので

n≧2 に対し，
$$\begin{aligned}\frac{a_n}{(-1)^n n!}&=\frac{a_1}{(-1)^1 1!}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)\\&=-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\\&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\&=-h_n\end{aligned}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

よって $a_n=(-1)^{n+1}n!h_n$ となる。

以上より $a_n=(-1)^{n+1}n!h_n$， $b_n=(-1)^n n!$