

[東京大学 2005 年前期 理科 1]



$x > 0$ に対し $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n = 1, 2, \dots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を用いて

$f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$ と表されることを示し, a_n, b_n に関する漸化式を求めよ。

(2) $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ とおく。 h_n を用いて a_n, b_n の一般項を求めよ。



[東京大学 2005 年前期 理科 2]



$|z| > \frac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を

T とする。すなわち、 $T = \left\{ w \mid w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leq \frac{5}{4} \right\}$ とする。

このとき、 T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。



[東京大学 2005 年前期 理科 3]



関数 $f(x)$ を $f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$ とする。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $x > \frac{1}{2}$ ならば $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) x_0 を正の数とするとき、数列 $\{x_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) を、 $x_{n+1} = f(x_n)$ によって定める。

$x_0 > \frac{1}{2}$ であれば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ であることを示せ。



[東京大学 2005 年前期 理科 4]



3 以上 9999 以下の奇数 a で, $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。



[東京大学 2005 年前期 理科 5]



N を 1 以上の整数とする。数字 $1, 2, \dots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ、計 N 枚用意し、甲、乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

(i) 甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。

(ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は、そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は、 $b=0$ とする。 $a+b > N$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。

(iii) $a+b \leq N$ の場合は、乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。 $a+b < c$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。

(iv) $a+b \geq c$ の場合は、乙はもう 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。 $a+b < c+d \leq N$ の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(iii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、 a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし、各カードがひかれる確率は等しいものとする。



[東京大学 2005 年前期 理科 6]



r を正の実数とする。 xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2, y^2 + z^2 \geq r^2, z^2 + x^2 \leq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。

