[東京大学 2005 年前期 文科 $\boxed{1}$]

$f(x)$ を $f(0)=0$ を満たす 2 次関数とする。a, b を実数として，関数 $g(x)$ を次で考える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leqq 0) \\ bx & (x>0) \end{cases}$$

a, b をいろいろ変化させ $\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$ が最小になるようにする。

このとき，$g(-1)=f(-1),\ g(1)=f(1)$ であることを示せ。

$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leqq 0) \\ bx & (x>0) \end{cases}$ であるから $g'(x)=\begin{cases} a & (x<0) \\ b & (x>0) \end{cases}$ である。

このとき，

$$\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\{f'(x)-a\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-b\}^2dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left\{\{f'(x)\}^2-2af'(x)+a^2\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{\{f'(x)\}^2-2bf'(x)+b^2\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2dx-2a\Big[f(x)\Big]_{-1}^{0}+a^2\Big[x\Big]_{-1}^{0}-2b\Big[f(x)\Big]_{0}^{1}+b^2\Big[x\Big]_{-1}^{0}$$

$f(0)=0$ であるから

$$=a^2+2af(-1)+b^2-2bf(1)+\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2dx \quad \cdots ①$$

ここで，$A=\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2dx$ とおくと

$①=a^2+2af(-1)+b^2-2bf(1)+A$

$\quad=\{a+f(-1)\}^2+\{b-f(1)\}^2+A-\{f(-1)\}^2-\{f(1)\}^2$

$\quad\geqq A-\{f(-1)\}^2-\{f(1)\}^2$

等号成立は $\begin{cases} a+f(-1)=0 \\ b-f(1)=0 \end{cases}$ のときで，$a=-g(-1),\ b=g(1)$ なので

$-g(-1)+f(-1)=0,\ g(1)-f(1)=0$ のときに成立する。

よって，最小になるとき $g(-1)=f(-1)$，$g(1)=f(1)$ となり，題意は示された。

[東京大学 2005 年前期 文科 $\boxed{2}$]

3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

$a^2-a=a(a-1)$ であり，$a,\ a-1$ は連続する 2 整数であるから偶奇が異なるので互いに素である。

よって，これらの積 $a(a-1)$ が $10000=2^4\times5^4$ で割り切れるためには

奇数 a は 5^4 の倍数であり，かつ偶数 $a-1$ は 2^4 の倍数でなければならない。

このとき，$a=5^4m$，$a-1=2^4n$（$m,\ n$ は整数）…① とおくことができる。

a は 3 以上 9999 以下の奇数であるから，m は $1\leqq m\leqq15$ を満たす奇数 …② である。

さらに，$m,\ n$ は①より $625m-1=16n \Leftrightarrow 625(m-1)=16(n-39)$ を満たすので，

$m-1$ は 16 の倍数である。②よりこれを満たす m は $m=1$ のみである。

よって，$a=625$ のみが求めるものである。

［注］$625m-1=16n \Leftrightarrow 625m-16n=1$ …③

であり，$625=16\times39+1$ より $625\times1-16\times39=1$ …④ なので

③−④より $625(m-1)-16(n-39)=0 \Leftrightarrow 625(m-1)=16(n-39)$ となる。

[東京大学 2005 年前期 文科 $\boxed{3}$]

★―――――――――――――――――――――――――――――――――――――★

0 以上の実数 $s,\ t$ が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式 $x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ の解のとる値の範囲を求めよ。

★―――――――――――――――――――――――――――――――――――――★

$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ …①

$s+t=u,\ s-t=v$ とおくと，① ⇔ $x^4-2ux^2+v^2=0$ …②

また， $s=\dfrac{u+v}{2},\ t=\dfrac{u-v}{2}$ であるから

$s^2+t^2=1$ に代入して $\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2+\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow u^2+v^2=2$ …③

③より $v^2=2-u^2$ であるから，② ⇔ $x^4-2ux^2+2-u^2=0$

$\Leftrightarrow u^2+2x^2u-x^4-2=0$ …④

ここで， $s\geqq 0,\ t\geqq 0$ より $u+v\geqq 0,\ u-v\geqq 0 \Leftrightarrow v\geqq -u,\ v\leqq u$ …⑤ である。

③，⑤より $1\leqq u\leqq \sqrt{2}$ …⑥ であり，

u に関する 2 次方程式④が，⑥の範囲に実数解をもつような x の範囲を求めればよい。

$f(u)=u^2+2x^2u-x^4-2=(u+x^2)^2-2x^4-2$ とおくと

$f(u)$ のグラフの軸は $u=-x^2\leqq 0$ であるから，

$f(1)=-1+2x^2-x^4=-(1-x^2)^2\leqq 0$

$f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}x^2-x^4=x^2\left(2\sqrt{2}-x^2\right)\geqq 0$

を満たせばよい。

このとき， $0\leqq x^2\leqq 2\sqrt{2}$ となるので，

求める範囲は $-\sqrt{2\sqrt{2}}\leqq x\leqq \sqrt{2\sqrt{2}}$

[東京大学 2005 年前期 文科 $\boxed{4}$]

N を 1 以上の整数とする。数字$1, 2, \cdots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ，計 N 枚用意し，甲，乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

（ｉ）甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。

（ⅱ）甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は，そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は，$b=0$ とする。$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

（ⅲ）$a+b \leqq N$ の場合は，乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

（ⅳ）$a+b \geqq c$ の場合は，乙はもう 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。$a+b<c+d \leqq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

（ⅲ)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし，各カードがひかれる確率は等しいものとする。

このゲームの流れは次の図の通りである。

$$
\begin{tikzcd}
a+b>N\ (\text{乙の勝ち}) & & \\
a+b \leqq N \arrow[r] \arrow[dr] & a+b<c\ (\text{乙の勝ち}) & \\
& a+b \geqq c \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & a+b<c+d \leqq N\ (\text{乙の勝ち}) \\
& & c+d \leqq a+b \leqq N\ (\text{甲の勝ち}) \\
& & a+b \leqq N<c+d\ (\text{甲の勝ち})
\end{tikzcd}
$$

(1) 甲が 2 回目にカードをひかないとき，$b=0$ であるから，甲が勝つのは

『$c \leqq a \leqq N$ かつ 「$c+d \leqq a \leqq N$ または $a \leqq N<c+d$」』のときである。

c の定め方は a 通りあり，c を固定したとき，d の定め方は

$d \leqq a-c$ のときは $a-c$ 通り，

$d > N-c$ のときは $N-(N-c)=c$ 通りあるので，

求める確率は $\dfrac{1}{N}\times\dfrac{a}{N}\times\dfrac{(a-c)+c}{N}=\dfrac{a^2}{N^3}$

(2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき，

$a+b \leqq N \Leftrightarrow b \leqq N-a$ となる b の定め方は $N-a$ 通り。

b を固定したとき，甲が勝つのは

『$c \leqq a+b$ かつ 「$c+d \leqq a+b \leqq N$ または $a+b \leqq N < c+d$」』のときであり，

$1 \leqq c \leqq a+b$ で c を固定すると，d の定め方は

$d \leqq a+b-c$ のときは $a+b-c$ 通り，

$d > N-c$ のときは $N-(N-c)=c$ 通りあるので，

$(c,\, d)$ の定め方は $(a+b)\times\{(a+b-c)+c\}=(a+b)^2$ 通りある。

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}\sum_{b=1}^{N-a}\frac{1}{N}\cdot\frac{(a+b)^2}{N^2}&=\frac{1}{N^3}\sum_{k=a+1}^{N}k^2\\&=\frac{1}{N^3}\left(\sum_{k=1}^{N}k^2-\sum_{k=1}^{a}k^2\right)\\&=\frac{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)}{6N^3}\end{aligned}$$