[東京大学 2005 年前期 文科 $\boxed{3}$]

0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式 $x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ の解のとる値の範囲を求めよ。

$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ …①

$s+t=u,\ s-t=v$ とおくと，① $\Leftrightarrow$ $x^4-2ux^2+v^2=0$ …②

また，$s=\dfrac{u+v}{2},\ t=\dfrac{u-v}{2}$ であるから

$s^2+t^2=1$ に代入して $\left(\dfrac{u+v}{2}\right)^2+\left(\dfrac{u-v}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow u^2+v^2=2$ …③

③より $v^2=2-u^2$ であるから，② $\Leftrightarrow$ $x^4-2ux^2+2-u^2=0$

$\Leftrightarrow$ $u^2+2x^2u-x^4-2=0$ …④

ここで，$s\geqq 0,\ t\geqq 0$ より $u+v\geqq 0,\ u-v\geqq 0$ $\Leftrightarrow$ $v\geqq -u,\ v\leqq u$ …⑤ である。

③，⑤より $1\leqq u\leqq \sqrt{2}$ …⑥ であり，

u に関する 2 次方程式④が，⑥の範囲に実数解をもつような x の範囲を求めればよい。

$f(u)=u^2+2x^2u-x^4-2=(u+x^2)^2-2x^4-2$ とおくと

$f(u)$ のグラフの軸は $u=-x^2\leqq 0$ であるから，

$f(1)=-1+2x^2-x^4=-(1-x^2)^2\leqq 0$

$f\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}x^2-x^4=x^2\left(2\sqrt{2}-x^2\right)\geqq 0$

を満たせばよい。

このとき，$0\leqq x^2\leqq 2\sqrt{2}$ となるので，

求める範囲は $-\sqrt{2\sqrt{2}}\leqq x\leqq \sqrt{2\sqrt{2}}$