

[東京大学 2005 年前期 文科 2]



3 以上 9999 以下の奇数 a で、 $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。



$a^2 - a = a(a-1)$ であり、 $a, a-1$ は連続する 2 整数であるから偶奇が異なるので互いに素である。

よって、これらの積 $a(a-1)$ が $10000 = 2^4 \times 5^4$ で割り切れるためには

奇数 a は 5^4 の倍数であり、かつ偶数 $a-1$ は 2^4 の倍数でなければならない。

このとき、 $a = 5^4 m$ 、 $a-1 = 2^4 n$ (m, n は整数) …① とおくことができる。

a は 3 以上 9999 以下の奇数であるから、 m は $1 \leq m \leq 15$ を満たす奇数 …② である。

さらに、 m, n は①より $625m-1=16n \Leftrightarrow 625(m-1)=16(n-39)$ を満たすので、

$m-1$ は 16 の倍数である。②よりこれを満たす m は $m=1$ のみである。

よって、 $a=625$ のみが求めるものである。

[注] $625m-1=16n \Leftrightarrow 625m-16n=1$ …③

であり、 $625=16 \times 39+1$ より $625 \times 1-16 \times 39=1$ …④ なので

③-④より $625(m-1)-16(n-39)=0 \Leftrightarrow 625(m-1)=16(n-39)$ となる。