[**東京大学 2005 年前期 文科 $\boxed{1}$**]

$f(x)$ を $f(0)=0$ を満たす 2 次関数とする。a, b を実数として，関数 $g(x)$ を次で考える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leqq 0) \\ bx & (x>0) \end{cases}$$

a, b をいろいろ変化させ $\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$ が最小になるようにする。

このとき，$g(-1)=f(-1),\ g(1)=f(1)$ であることを示せ。

$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leqq 0) \\ bx & (x>0) \end{cases}$ であるから $g'(x)=\begin{cases} a & (x<0) \\ b & (x>0) \end{cases}$ である。

このとき，

$$\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\{f'(x)-a\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-b\}^2dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left\{\{f'(x)\}^2-2af'(x)+a^2\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{\{f'(x)\}^2-2bf'(x)+b^2\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx-2a\left[f(x)\right]_{-1}^{0}+a^2\left[x\right]_{-1}^{0}-2b\left[f(x)\right]_{0}^{1}+b^2\left[x\right]_{-1}^{0}$$

$f(0)=0$ であるから

$$=a^2+2af(-1)+b^2-2bf(1)+\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx \quad \cdots ①$$

ここで，$A=\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2\,dx$ とおくと

$$①=a^2+2af(-1)+b^2-2bf(1)+A$$

$$=\{a+f(-1)\}^2+\{b-f(1)\}^2+A-\{f(-1)\}^2-\{f(1)\}^2$$

$$\geqq A-\{f(-1)\}^2-\{f(1)\}^2$$

等号成立は $\begin{cases} a+f(-1)=0 \\ b-f(1)=0 \end{cases}$ のときで，$a=-g(-1),\ b=g(1)$ なので

$-g(-1)+f(-1)=0,\ g(1)-f(1)=0$ のときに成立する。

よって，最小になるとき $g(-1)=f(-1)$，$g(1)=f(1)$ となり，題意は示された。