

[東京大学 2005 年前期 文科 1]



$f(x)$ を $f(0) = 0$ を満たす 2 次関数とする。 a, b を実数として、関数 $g(x)$ を次で考える。

$$g(x) = \begin{cases} ax & (x \leq 0) \\ bx & (x > 0) \end{cases}$$

a, b をいろいろ変化させ $\int_{-1}^0 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{f'(x) - g'(x)\}^2 dx$ が最小になるようにする。

このとき、 $g(-1) = f(-1), g(1) = f(1)$ であることを示せ。



[東京大学 2005 年前期 文科 2]



3 以上 9999 以下の奇数 a で, $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。



[東京大学 2005 年前期 文科 3]



0 以上の実数 s, t が $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 方程式 $x^4 - 2(s+t)x^2 + (s-t)^2 = 0$ の解のとり値の範囲を求めよ。



[東京大学 2005 年前期 文科 4]



N を 1 以上の整数とする。数字 $1, 2, \dots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ、計 N 枚用意し、甲、乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

(i) 甲が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。

(ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する。ひいた場合は、そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は、 $b=0$ とする。 $a+b > N$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。

(iii) $a+b \leq N$ の場合は、乙が 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。 $a+b < c$ の場合は乙の勝ちとし、ゲームは終了する。

(iv) $a+b \geq c$ の場合は、乙はもう 1 枚カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。 $a+b < c+d \leq N$ の場合は乙の勝ちとし、それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(iii) の段階で、甲にとってどちらの選択が有利であるかを、 a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき、甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし、各カードがひかれる確率は等しいものとする。

