[東京大学 2004 年後期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

r は正の実数とし，角 θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。xy 平面の原点 O を P_0，$(1,\ 0)$ を P_1 として，点 P_2, P_3, $\cdots$ を，以下の条件 (a), (b), (c) が $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して満たされるようにとる。

(a) $P_{n+1}P_{n+2}=rP_nP_{n+1}$

(b) $\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}$

(c) 点 P_n, P_{n+2}, P_{n+3} は同一直線上にある。

このとき次の問に答えよ。

(1) r を θ を用いて表せ。

(2) 点 P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。複素数 $z_n=x_n+y_n i$ を θ を用いて表せ。

(3) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに収束するための必要十分条件は $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

以下 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ をそれぞれ θ の関数と考えて，$\alpha(\theta)$, $\beta(\theta)$ とおく。

(4) $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\alpha(\theta)$, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\beta(\theta)$ をそれぞれ求めよ。

(5) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $\beta(\theta)$ の最大値を求めよ。

☆ ☆

[東京大学 2004 年後期 $\boxed{2}$]

集合 A, B を $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B=\{0, 1\}$ とし, N を 3 以上の整数とする。また, 各項が 0 または 1 からなる数列を 01 数列と呼ぶことにする。

01 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ に対し, A から B への写像 f を用いて, 新しい 01 数列 $b_1, b_2, \cdots, b_N$ を,

$$b_1 = f(a_1),\ b_2 = f(2a_1+a_2),\ b_k = f(4a_{k-2}+2a_{k-1}+a_k) \quad (k=3, 4, \cdots, N)$$

と定め, $b_1, b_2, \cdots, b_N$ は $a_1, a_2, \cdots, a_N$ から f によって得られるという。ただし, A から B への写像 f とは, A の各要素 x に対して B の要素 $f(x)$ をただひとつ対応させる規則をさすものとする。

次の問に答えよ。

(1) A から B への写像は, 全部で何種類あるか。

(2) $f(0)=f(3)=f(4)=f(7)=0$, $f(1)=f(2)=f(5)=f(6)=1$, であるとき,

$$b_k = \frac{1}{2}\{1+(-1)^k\}\ (k=1, 2, \cdots, N)$$

となるような 01 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ を求めよ。

(3) A から B への写像 f が, 条件

(P) $\quad f(2m) \neq f(2m+1) \quad (m=0, 1, 2, 3)$

を満たすとする。このような f は何通りあるか。

(4) A から B への写像 f が条件(P)を満たすならば, どのような N 項からなる 01 数列も, ある 01 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ から f によって得られることを示せ。

[東京大学 2004 年後期 $\boxed{3}$]

xy 平面に点 $(-1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 A と，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 B をとる。円 A の内部を D，円 B の内部を E とする。次の問に答えよ。

(1) 点 $(-1+\cos\theta,\ \sin\theta)$ における円 A の接線を ℓ とする。円 B の接線 m が ℓ と直交するとき，ℓ と m の交点 P の座標を θ を用いて表せ。

(2) 領域 D にも E にも重ならないように 1 辺の長さが 2 の正方形を xy 平面内で動かすとき，この正方形が通りえない部分の面積を求めよ。