



集合 A, B を $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1\}$ とし, N を 3 以上の整数とする。また, 各項が 0 または 1 からなる数列を 01 数列と呼ぶことにする。

01 数列 a_1, a_2, \dots, a_N に対し, A から B への写像 f を用いて, 新しい 01 数列 b_1, b_2, \dots, b_N を,

$$b_1 = f(a_1), b_2 = f(2a_1 + a_2), b_k = f(4a_{k-2} + 2a_{k-1} + a_k) \quad (k = 3, 4, \dots, N)$$

と定め, b_1, b_2, \dots, b_N は a_1, a_2, \dots, a_N から f によって得られるという。ただし, A から B への写像 f とは, A の各要素 x に対して B の要素 $f(x)$ をただひとつ対応させる規則をさすものとする。

次の問に答えよ。

(1) A から B への写像は, 全部で何種類あるか。

(2) $f(0) = f(3) = f(4) = f(7) = 0$, $f(1) = f(2) = f(5) = f(6) = 1$, であるとき,

$$b_k = \frac{1}{2} \{1 + (-1)^k\} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

となるような 01 数列 a_1, a_2, \dots, a_N を求めよ。

(3) A から B への写像 f が, 条件

$$(P) \quad f(2m) \neq f(2m+1) \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

を満たすとする。このような f は何通りあるか。

(4) A から B への写像 f が条件 (P) を満たすならば, どのような N 項からなる 01 数列も, ある 01 数列 a_1, a_2, \dots, a_N から f によって得られることを示せ。

