[ 東京大学 2004 年後期 $\boxed{1}$ ]

$r$ は正の実数とし，角 $\theta$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。$xy$ 平面の原点 O を $P_0$，$(1, 0)$ を $P_1$ として，点 $P_2$, $P_3$, $\cdots$ を，以下の条件(a), (b), (c)が $n=0, 1, 2, \cdots$ に対して満たされるようにとる。

(a) $P_{n+1}P_{n+2} = rP_nP_{n+1}$

(b) $\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}$

(c) 点 $P_n$, $P_{n+2}$, $P_{n+3}$ は同一直線上にある。

このとき次の問に答えよ。

(1) $r$ を $\theta$ を用いて表せ。

(2) 点 $P_n$ の座標を $(x_n, y_n)$ とする。複素数 $z_n = x_n + y_n i$ を $\theta$ を用いて表せ。

(3) 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに収束するための必要十分条件は $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

以下 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ をそれぞれ $\theta$ の関数と考えて，$\alpha(\theta)$, $\beta(\theta)$ とおく。

(4) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0} \alpha(\theta)$, $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0} \beta(\theta)$ をそれぞれ求めよ。

(5) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $\beta(\theta)$ の最大値を求めよ。