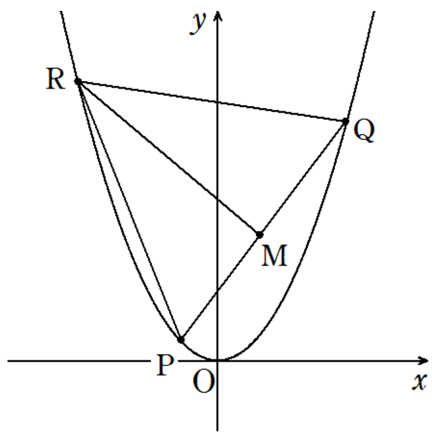
[東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{1}$]

xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 $\mathrm{P,Q,R}$ が次の条件を満たしている。

$\triangle\mathrm{PQR}$ は一辺の長さ a の正三角形であり，点 $\mathrm{P,Q}$ を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき，a の値を求めよ。



$p<q$ とし，$\mathrm{P}(p,\ p^2),\ \mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ であるから

$\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2}$ より $p+q=\sqrt{2}$ …①

また，$\mathrm{PQ}=a$ より $\sqrt{(q-p)^2+(q^2-p^2)^2}=a$

$$\Leftrightarrow\ (q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow\ (q-p)^2+(q-p)^2(p+q)^2=a^2$$

これと①より $3(q-p)^2=a^2$ であるから $q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ …②

ここで，線分 PQ の中点を M とすると $\mathrm{M}\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ であり，

①，②より $q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right),\ p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$ なので

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\dfrac{1}{4}\left(2-\dfrac{a^2}{3}\right)=1+\dfrac{a^2}{6}$ であるから $\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$

$\triangle\mathrm{PQR}$ は 1 辺の長さが a の正三角形であるから $\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ},\ \mathrm{RM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ である。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{MR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2},\ 1\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\right)$$ （複号同順）

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 6+a^2\pm 6a=6\mp 12a+6a^2$$

$$\Leftrightarrow\quad 5a^2\mp 18a=0$$

$a>0$ より $a=\dfrac{18}{5}$

[東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{2}$]

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

(1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し，10 の位の数を a，1 の位の数を b とおいたとき，$a+b$ が偶数となるならば，b は 0 または 4 であることを示せ。

(2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し，1000 の位の数，100 の位の数，10 の位の数，および 1 の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば，その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。

---

(1) 問題の平方数を $x^2\ (x>0)$ とすると，x^2 は 3 桁以上であるから x は 2 桁以上である。

よって，x の 1 の位を u，10 の位を v とすると，$x^2=u^2+20uv+$（100 の倍数）と表せる。

u^2 の 10 の位を a'，1 の位を b' とする。

$20uv$ の 10 の位は偶数であり，1 の位は 0 であるから

$a=a'+$（偶数），$b=b'$

したがって，$a'+b'$ は偶数でなければならない。

$u=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ のうち，この条件を満たすものは

$u=0$（$a'=0, b'=0$）

$u=2$（$a'=0, b'=4$）

$u=8$（$a'=6, b'=4$）　　　であるから $b=b'=0$ または 4

(2) 問題の平方数 x^2 は，1 の位と 10 の位が等しいので，(1)の条件を満たす。

よって，x^2 の 1 の位は 0 または 4 である。

もし，x^2 の 1 の位が 4 であるとすると，下 4 桁がすべて 4 となり，

$x^2=4444+$（10000 の倍数）となる。

したがって，x は偶数であるから $x=2y$ とおくと，

$y^2=1111+$（2500 の倍数）となる。

すなわち，平方数 y^2 の 1 の位と 10 の位は 1 でなければならないが，(1)よりそれはあり得ない。

よって，x^2 の 1 の位は 0，すなわち，x^2 の下 4 桁はすべて 0 となり，x^2 は 10000 で割り切れる。

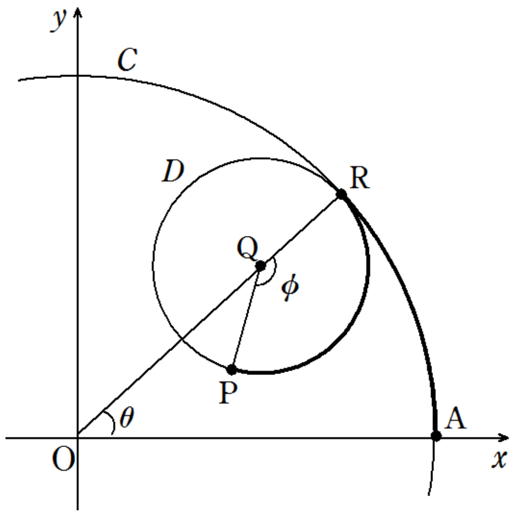
[東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{3}$]

半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の一点を P とする。点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。

円 C が原点中心，半径 10 の円となるように座標を入れる。

円板 D の周上の点 P が最初 $(10,\ 0)$ にあるものとする。

円板 D が中心 O のまわりに θ だけ回転したときの図は次の通りであり，各点を図のように定める。



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}7\cos\theta\\7\sin\theta\end{pmatrix}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を $-\phi$ 回転したものであるから $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}3\cos(\theta-\phi)\\3\sin(\theta-\phi)\end{pmatrix}$ となる。

また，滑ることなく回転することから $\overset{\frown}{\mathrm{AR}}=\overset{\frown}{\mathrm{PR}}$ より $10\theta=3\phi$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}3\cos\left(-\dfrac{7}{3}\theta\right)\\3\sin\left(-\dfrac{7}{3}\theta\right)\end{pmatrix} \text{ より } \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}7\cos\theta\\7\sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cos\left(-\dfrac{7}{3}\theta\right)\\3\sin\left(-\dfrac{7}{3}\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cos\theta+3\cos\dfrac{7}{3}\theta\\7\sin\theta-3\sin\dfrac{7}{3}\theta\end{pmatrix}$$

また，点 P が再び円 C に接するとき，$\phi=2\pi$ であるから

$10\theta=3\cdot2\pi$ より $\theta=\dfrac{3}{5}\pi$ である。

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$0<\theta<\dfrac{3}{5}\pi$ においては

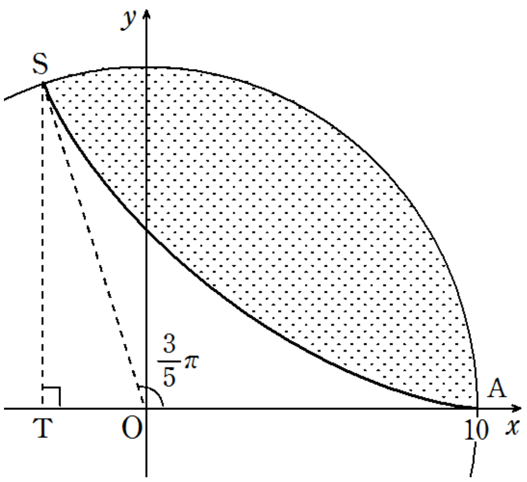
$$\frac{dx}{d\theta}=-7\sin\theta-7\sin\frac{7}{3}\theta=-14\sin\frac{5\theta}{3}\cos\frac{2\theta}{3}<0$$

$$\frac{dy}{d\theta}=7\cos\theta-7\cos\frac{7}{3}\theta=14\sin\frac{5\theta}{3}\sin\frac{2\theta}{3}>0$$

であり，点 P の変化は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{3}{5}\pi$
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	
$(x,\ y)$	$(10,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(10\cos\dfrac{3}{5}\pi,\ 10\sin\dfrac{3}{5}\pi\right)$

したがって，点 P の軌跡の概形は次の通り。



（図の打点部分の面積）＝「扇形 OAS」＋「三角形 OST」－「図形 AST」である。

$$（図形\mathrm{AST}）=\int_{10\cos\frac{3}{5}\pi}^{10} y\,dx$$

$$=\int_{\frac{3}{5}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{3}{5}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\left(-7\sin\theta-7\sin\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{3}{5}\pi}\left(49\sin^2\theta-28\sin\theta\sin\frac{7}{3}\theta-21\sin^2\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$=\left[14\theta-\frac{49}{4}\sin 2\theta-\frac{21}{5}\sin\frac{10}{3}\theta+\frac{21}{2}\sin\frac{4}{3}\theta+\frac{9}{4}\sin\frac{14}{3}\theta\right]_0^{\frac{3}{5}\pi}$$

$$=\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left(49\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}-14\left(\cos\frac{10}{3}\theta-\cos\frac{4}{3}\theta\right)-21\cdot\frac{1-\cos\frac{14}{3}\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{42}{5}\pi+\frac{49}{4}\sin\frac{6}{5}\pi+\frac{21}{2}\sin\frac{4}{5}\pi$$

$$=\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}$$

であるから

（図の打点部分の面積）＝ 「扇形OAS」＋「三角形OST」－「図形AST」

$$=\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{3}{5}\pi+\frac{1}{2}\cdot\left|10\cos\frac{3}{5}\pi\right|\cdot 10\sin\frac{3}{5}\pi-\left(\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=30\pi+50\sin\frac{2}{5}\pi\cos\frac{2}{5}\pi-\frac{42}{5}\pi-25\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=\frac{108}{5}\pi+25\sin\frac{4}{5}\pi-25\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=\frac{108}{5}\pi$$

大きい方の面積は，円Cの面積から引いて $100\pi-\frac{108}{5}\pi=\frac{392}{5}\pi$

[東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{4}$]

関数 $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=x^3-3x\ ,\ f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x)\ ,\ f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$$

以下同様に，$n≧3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば，関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) a を実数とする。$f_2(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

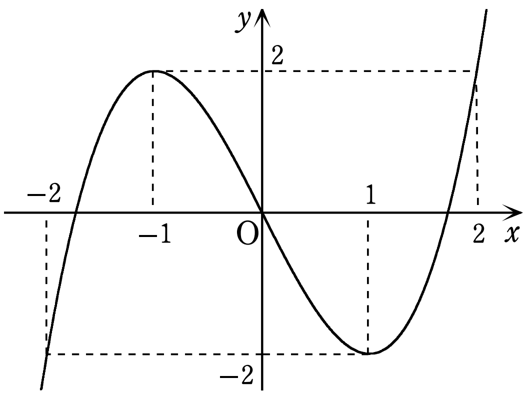
(3) n を 3 以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

(1) $f_1(x)=x^3-3x$ より $f_1'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f_1(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	↗	2	↘	-2	↗

よって，$y=f_1(x)$ のグラフは次の図のようになる。



$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数は　$a<-2,\ 2<a$ のとき 1 個

$a=\pm 2$ のとき 2 個

$-2<a<2$ のとき 3 個

(2) $f_2(x)=a \Leftrightarrow \{f_1(x)\}^3-3f_1(x)=a$ …① である。

$a<-2,\ 2<a$ のとき ①を満たす $f_1(x)$ は 1 個で, $f_1(x)<-2,\ 2<f_1(x)$ より

$f_2(x)=a$ を満たす実数 x は 1 個

$a=2$ のとき ①を満たす $f_1(x)$ は 2 個で, $f_1(x)=-1,\ 2$ であるが,

$f_1(x)=-1$ のとき $f_2(x)=a$ を満たす実数 x は 3 個,

$f_1(x)=-2$ のとき $f_2(x)=a$ を満たす実数 x は 2 個,

$y=x^3-3x$ のグラフよりこれらはすべて異なる。よって 5 個。

$a=-2$ のとき ①を満たす $f_1(x)$ は 2 個で, $f_1(x)=-2,1$ であるが,

$f_1(x)=-2$ のとき $f_2(x)=a$ を満たす実数 x は 2 個,

$f_1(x)=1$ のとき $f_2(x)=a$ を満たす実数 x は 3 個,

$y=x^3-3x$ のグラフよりこれらはすべて異なる。よって 5 個。

$-2<a<2$ のとき ①を満たす $f_1(x)$ は 3 個で，これらを小さい順に $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ とすると

$-2<\alpha_1<-1<\alpha_2<1<\alpha_3<2$ であり, α_i ($i=1,2,3$) に対し,

それぞれ $f_2(x)=a$ を満たす実数 x は 3 個,

$y=x^3-3x$ のグラフよりこれらはすべて異なる。よって 9 個。

(3) n を 1 以上の自然数とする。

$-2<a<2$ とし, $f_n(x)=a$ を満たす実数 x の個数が 3^n 個であることを数学的帰納法により示す。

これが示されれば, $a=0$ のときが題意の場合である。

(ⅰ) $n=1$ のとき

(1)より成り立つ。

(ⅱ) $n=k$ のとき

$f_k(x)=a$ を満たす実数 x の個数が 3^k 個であると仮定する。

このとき, $f_{k+1}(x)=b\ (-2<b<2) \Leftrightarrow f_1(f_k(x))=b$ …① を満たす実数 x の個数を考える。

$f_k(x)=a$ とおくと, $f_1(a)=b$ であり，これを満たす a は 3 個あり,

小さい方から $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ とおくと $-2<\alpha_1<-1<\alpha_2<1<\alpha_3<2$ を満たす。

よって，帰納法の仮定から $f_k(x)=\alpha_1$，$f_k(x)=\alpha_2$，$f_k(x)=\alpha_3$ を満たす実数 x の個数は

それぞれ 3^k 個 であるから，①を満たす実数 x の個数は $3\times 3^k=3^{k+1}$ 個。

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

［ 東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{5}$ ］

r を正の実数とする。xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\,0,\,0)$ を中心とする半径 1 の球を A，点 $\mathrm{P}(r,\,0,\,0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし，球 A と球 B の和集合とは，球 A と球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1) V を r の関数として表し，そのグラフの概形をかけ。

(2) $V=8$ となるとき，r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

（注意）円周率 π は $3.14<\pi<3.15$ を満たす。

---

(1) 球 A の体積を $|A|$ と表す。

（ i ）$0<r\leqq 2$ のとき

$$V=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$=2\times\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3-2\times\int_{\frac{r}{2}}^{1}\pi(1-x^2)\,dx$$
$$=\left(-\frac{r^3}{12}+r+\frac{4}{3}\right)\pi$$

このとき，$\dfrac{dV}{dr}=-\dfrac{\pi}{4}(r-2)(r+2)$ より $0<r\leqq 2$ で $\dfrac{dV}{dr}\geqq 0$

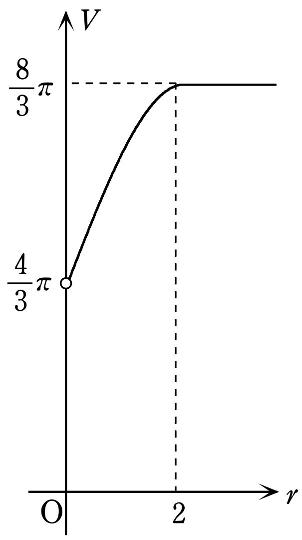
さらに，$\dfrac{d^2V}{dr^2}=-\dfrac{\pi}{2}r$ より $0<r\leqq 2$ で $\dfrac{d^2V}{dr^2}<0$

よって，V のグラフはこの区間で単調増加で上に凸である。

（ii）$r>2$ のとき

$$V=|A|+|B|=\frac{8}{3}\pi$$

以上より，グラフの概形は次の通り。



(2) $\frac{4}{3}\pi < 8 < \frac{8}{3}\pi$ であるから，$V=8$ となる r は $0<r<2$ にただ 1 つ存在する。

$\left(-\frac{r^3}{12}+r+\frac{4}{3}\right)\pi = 8 \Leftrightarrow -r^3+12r=\frac{96}{\pi}-16$ であり，

$3.14<\pi<3.15$ より $14.476<\frac{96}{\pi}-16<14.574$ なので

$14.476<-r^3+12r<14.574$ …① となる r を調べる。

$f(r)=-r^3+12r$ とおくと $f(1.5)=14.625$， $f(1.45)<14.352$ であるから

①を満たす r は $1.45<r<1.5$ に存在する。

したがって，小数第 2 位を四捨五入し，小数第 1 位まで r の値を求めると $r=1.5$ となる。

[東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{6}$]

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す。たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の後，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

（注意）さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

---

(1) 3 回後に「黒白白」となるのは

「左端の板を 3 回裏返す」

「左端の板を 1 回，まん中の板を 2 回裏返す」

「左端の板を 1 回，右端の板を 2 回裏返す」

ときであるから，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + 2\times {}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{7}{27}$

(2) □で白または黒を表すものとする。

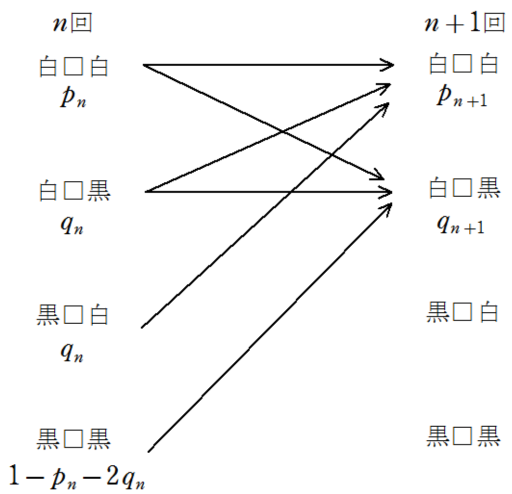
n 回後に「白□白」となる確率を求めればよい。

n 回後に「白□白」となる確率を p_n とし，

「白□黒」となる確率を q_n とする。

対称性より「黒□白」となる確率も q_n である。

n 回目と $n+1$ 回目の関係は次の図の通りであるから



推移確率はいずれの矢印も $\dfrac{1}{3}$

$n \geqq 0$ に対し，

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}q = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n \quad \cdots ①$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}(1 - p_n - 2q_n) = -\frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3} \quad \cdots ②$$

が成り立つ。

②を変形すると $q_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(q_n - \frac{1}{4}\right)$ より $q_n - \frac{1}{4} = \left(q_0 - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$q_0 = 0$ であるから $q_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ …③

③を①に代入して $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

これを変形すると $p_{n+1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{3}\left\{p_n - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ より

$$p_n - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left\{p_0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$p_0 = 1$ であるから $p_n - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

したがって $p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$