[東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{6}$]

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す。たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の後，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

（注意）さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

---

(1) 3 回後に「黒白白」となるのは

「左端の板を 3 回裏返す」

「左端の板を 1 回，まん中の板を 2 回裏返す」

「左端の板を 1 回，右端の板を 2 回裏返す」

ときであるから，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+2\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{7}{27}$

(2) □で白または黒を表すものとする。

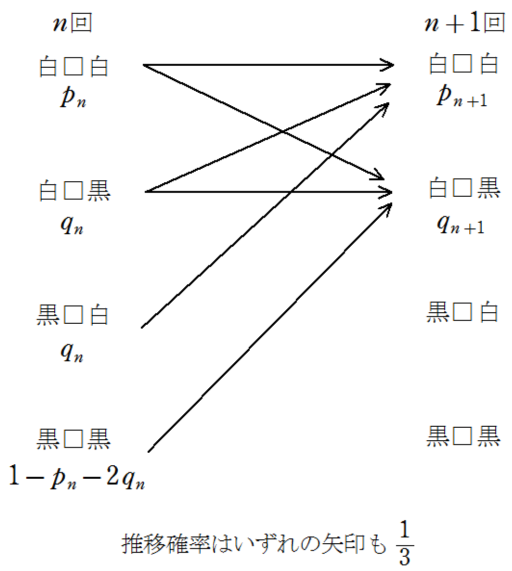
n 回後に「白□白」となる確率を求めればよい。

n 回後に「白□白」となる確率を p_n とし，

「白□黒」となる確率を q_n とする。

対称性より「黒□白」となる確率も q_n である。

n 回目と $n+1$ 回目の関係は次の図の通りであるから



$n \geqq 0$ に対し，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}q=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}q_n \quad \cdots ①$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}(1-p_n-2q_n)=-\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3} \quad \cdots ②$$

が成り立つ。

②を変形すると $q_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(q_n-\frac{1}{4}\right)$ より $q_n-\frac{1}{4}=\left(q_0-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$q_0=0$ であるから $q_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots ③$

③を①に代入して $p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$p_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

これを変形すると $p_{n+1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}\left\{p_n-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ より

$$p_n-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\left\{p_0-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$p_0=1$ であるから $p_n-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

したがって $p_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$