[東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{5}$]

---

r を正の実数とする。xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\,0,\,0)$ を中心とする半径 1 の球を A，点 $\mathrm{P}(r,\,0,\,0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし，球 A と球 B の和集合とは，球 A と球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1) V を r の関数として表し，そのグラフの概形をかけ。

(2) $V=8$ となるとき，r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

（注意）円周率 π は $3.14<\pi<3.15$ を満たす。

---

(1) 球 A の体積を $|A|$ と表す。

（ i ）$0<r\leqq 2$ のとき

$$V=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$=2\times\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3-2\times\int_{\frac{r}{2}}^{1}\pi(1-x^2)\,dx$$
$$=\left(-\frac{r^3}{12}+r+\frac{4}{3}\right)\pi$$

このとき，$\dfrac{dV}{dr}=-\dfrac{\pi}{4}(r-2)(r+2)$ より $0<r\leqq 2$ で $\dfrac{dV}{dr}\geqq 0$

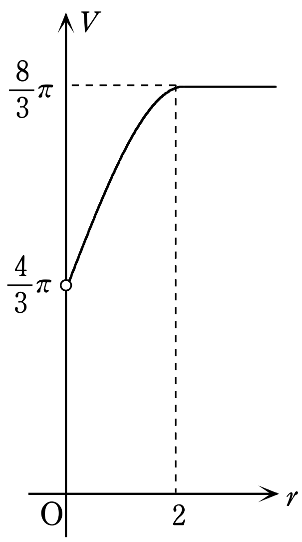
さらに，$\dfrac{d^2V}{dr^2}=-\dfrac{\pi}{2}r$ より $0<r\leqq 2$ で $\dfrac{d^2V}{dr^2}<0$

よって，V のグラフはこの区間で単調増加で上に凸である。

（ii）$r>2$ のとき

$$V=|A|+|B|=\frac{8}{3}\pi$$

以上より，グラフの概形は次の通り。



(2) $\frac{4}{3}\pi < 8 < \frac{8}{3}\pi$ であるから，$V=8$ となる r は $0<r<2$ にただ 1 つ存在する。

$\left(-\frac{r^3}{12}+r+\frac{4}{3}\right)\pi=8 \Leftrightarrow -r^3+12r=\frac{96}{\pi}-16$ であり，

$3.14<\pi<3.15$ より $14.476<\frac{96}{\pi}-16<14.574$ なので

$14.476<-r^3+12r<14.574$ …① となる r を調べる。

$f(r)=-r^3+12r$ とおくと $f(1.5)=14.625$，$f(1.45)<14.352$ であるから

①を満たす r は $1.45<r<1.5$ に存在する。

したがって，小数第 2 位を四捨五入し，小数第 1 位まで r の値を求めると $r=1.5$ となる。