[ 東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{4}$ ]

関数 $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=x^3-3x\ ,\ f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x)\ ,\ f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$$

以下同様に，$n \geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば，関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a$ を実数とする。$f_1(x)=a$ を満たす実数 $x$ の個数を求めよ。

(2) $a$ を実数とする。$f_2(x)=a$ を満たす実数 $x$ の個数を求めよ。

(3) $n$ を 3 以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ を満たす実数 $x$ の個数は $3^n$ であることを示せ。

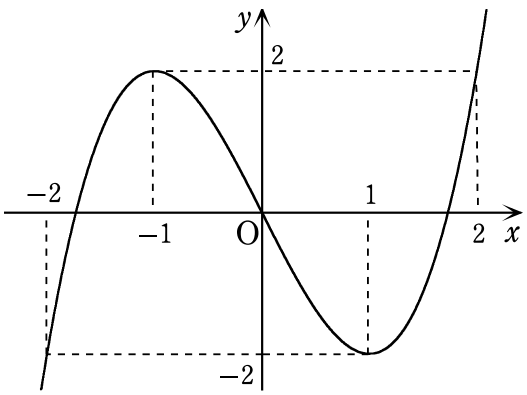
---

(1) $f_1(x)=x^3-3x$ より $f_1{}'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f_1(x)$ の増減は下表に従う。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1{}'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f_1(x)$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ |

よって，$y=f_1(x)$ のグラフは次の図のようになる。




$f_1(x)=a$ を満たす実数 $x$ の個数は $a<-2,\ 2<a$ のとき 1 個

$a=\pm 2$ のとき 2 個

$-2<a<2$ のとき 3 個

(2) $f_2(x)=a \iff \{f_1(x)\}^3-3f_1(x)=a$ …① である。

$a<-2,\ 2<a$ のとき ①を満たす $f_1(x)$ は 1 個で， $f_1(x)<-2,\ 2<f_1(x)$ より

$f_2(x)=a$ を満たす実数 $x$ は 1 個

$a=2$ のとき ①を満たす $f_1(x)$ は 2 個で， $f_1(x)=-1,\ 2$ であるが,

$f_1(x)=-1$ のとき $f_2(x)=a$ を満たす実数 $x$ は 3 個,

$f_1(x)=-2$ のとき $f_2(x)=a$ を満たす実数 $x$ は 2 個,

$y=x^3-3x$ のグラフよりこれらはすべて異なる。よって 5 個。

$a=-2$ のとき ①を満たす $f_1(x)$ は 2 個で， $f_1(x)=-2,1$ であるが,

$f_1(x)=-2$ のとき $f_2(x)=a$ を満たす実数 $x$ は 2 個,

$f_1(x)=1$ のとき $f_2(x)=a$ を満たす実数 $x$ は 3 個,

$y=x^3-3x$ のグラフよりこれらはすべて異なる。よって 5 個。

$-2<a<2$ のとき ①を満たす $f_1(x)$ は 3 個で，これらを小さい順に $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ とすると

$-2<\alpha_1<-1<\alpha_2<1<\alpha_3<2$ であり， $\alpha_i$（$i=1,2,3$）に対し,

それぞれ $f_2(x)=a$ を満たす実数 $x$ は 3 個,

$y=x^3-3x$ のグラフよりこれらはすべて異なる。よって 9 個。

(3) $n$ を 1 以上の自然数とする。

$-2<a<2$ とし， $f_n(x)=a$ を満たす実数 $x$ の個数が $3^n$ 個であることを数学的帰納法により示す。

これが示されれば， $a=0$ のときが題意の場合である。

（ｉ）$n=1$ のとき

(1)より成り立つ。

（ⅱ）$n=k$ のとき

$f_k(x)=a$ を満たす実数 $x$ の個数が $3^k$ 個であると仮定する。

このとき， $f_{k+1}(x)=b\ (-2<b<2) \iff f_1(f_k(x))=b$ …① を満たす実数 $x$ の個数を考える。

$f_k(x)=a$ とおくと， $f_1(a)=b$ であり，これを満たす $a$ は 3 個あり,

小さい方から $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ とおくと $-2<\alpha_1<-1<\alpha_2<1<\alpha_3<2$ を満たす。

よって，帰納法の仮定から $f_k(x)=\alpha_1$，$f_k(x)=\alpha_2$，$f_k(x)=\alpha_3$ を満たす実数 $x$ の個数は

それぞれ $3^k$ 個 であるから，①を満たす実数 $x$ の個数は $3\times3^k=3^{k+1}$ 個。

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。