

[東京大学 2004 年前期 理科 4]



関数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

$$f_1(x) = x^3 - 3x, f_2(x) = \{f_1(x)\}^3 - 3f_1(x), f_3(x) = \{f_2(x)\}^3 - 3f_2(x)$$

以下同様に、 $n \geq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば、関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x) = \{f_n(x)\}^3 - 3f_n(x)$$

で定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f_1(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) a を実数とする。 $f_2(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (3) n を 3 以上の自然数とする。 $f_n(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

