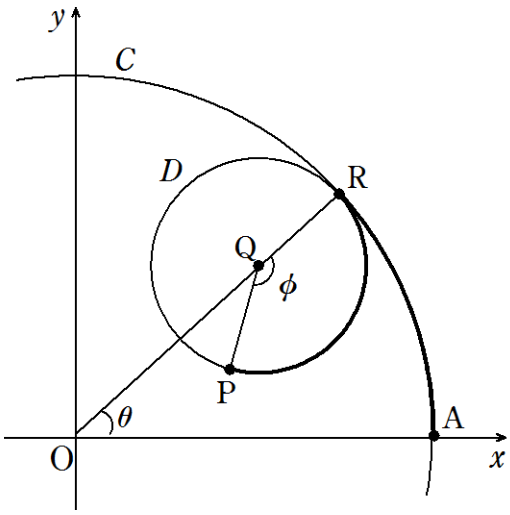
[東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{3}$]

半径 10 の円Cがある。半径 3 の円板Dを，円Cに内接させながら，円Cの円周に沿って滑ることなく転がす。円板Dの周上の一点をPとする。点Pが，円Cの円周に接してから再び円Cの円周に接するまでに描く曲線は，円Cを 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。

円Cが原点中心，半径 10 の円となるように座標を入れる。

円板Dの周上の点Pが最初$(10, 0)$にあるものとする。

円板Dが中心Oのまわりにθだけ回転したときの図は次の通りであり，各点を図のように定める。



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}7\cos\theta\\7\sin\theta\end{pmatrix}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$は$\overrightarrow{\mathrm{QR}}$を$-\phi$回転したものであるから $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}3\cos(\theta-\phi)\\3\sin(\theta-\phi)\end{pmatrix}$ となる。

また，滑ることなく回転することから $\overset{\frown}{\mathrm{AR}}=\overset{\frown}{\mathrm{PR}}$ より $10\theta=3\phi$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}3\cos\left(-\dfrac{7}{3}\theta\right)\\3\sin\left(-\dfrac{7}{3}\theta\right)\end{pmatrix} \text{ より } \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}7\cos\theta\\7\sin\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cos\left(-\dfrac{7}{3}\theta\right)\\3\sin\left(-\dfrac{7}{3}\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\cos\theta+3\cos\dfrac{7}{3}\theta\\7\sin\theta-3\sin\dfrac{7}{3}\theta\end{pmatrix}$$

また，点Pが再び円Cに接するとき，$\phi=2\pi$ であるから

$10\theta=3\cdot2\pi$ より $\theta=\dfrac{3}{5}\pi$ である。

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$0<\theta<\dfrac{3}{5}\pi$ においては

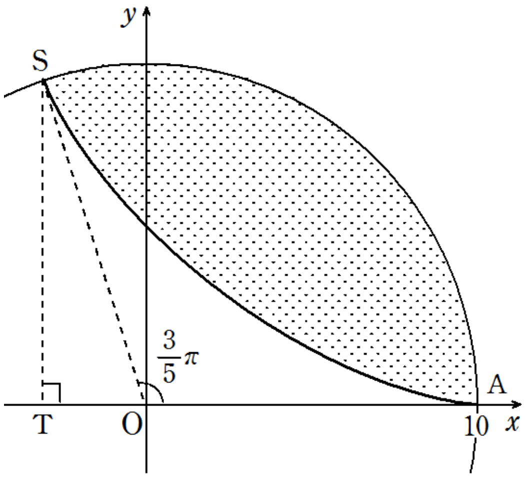
$$\frac{dx}{d\theta}=-7\sin\theta-7\sin\frac{7}{3}\theta=-14\sin\frac{5\theta}{3}\cos\frac{2\theta}{3}<0$$

$$\frac{dy}{d\theta}=7\cos\theta-7\cos\frac{7}{3}\theta=14\sin\frac{5\theta}{3}\sin\frac{2\theta}{3}>0$$

であり，点 P の変化は下表に従う。

θ	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}\pi$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	
$(x,\ y)$	$(10,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(10\cos\frac{3}{5}\pi,\ 10\sin\frac{3}{5}\pi\right)$

したがって，点 P の軌跡の概形は次の通り。



（図の打点部分の面積）＝　「扇形 OAS」＋「三角形 OST」－「図形 AST」　である。

$$（図形\mathrm{AST}）=\int_{10\cos\frac{3}{5}\pi}^{10} y\,dx$$

$$=\int_{\frac{3}{5}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_{\frac{3}{5}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\left(-7\sin\theta-7\sin\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$=\int_{0}^{\frac{3}{5}\pi}\left(49\sin^2\theta-28\sin\theta\sin\frac{7}{3}\theta-21\sin^2\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$=\left[14\theta-\frac{49}{4}\sin 2\theta-\frac{21}{5}\sin\frac{10}{3}\theta+\frac{21}{2}\sin\frac{4}{3}\theta+\frac{9}{4}\sin\frac{14}{3}\theta\right]_0^{\frac{3}{5}\pi}$$

$$=\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\left(49\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}-14\left(\cos\frac{10}{3}\theta-\cos\frac{4}{3}\theta\right)-21\cdot\frac{1-\cos\frac{14}{3}\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{42}{5}\pi+\frac{49}{4}\sin\frac{6}{5}\pi+\frac{21}{2}\sin\frac{4}{5}\pi$$

$$=\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}$$

であるから

（図の打点部分の面積）＝　「扇形OAS」＋「三角形OST」－「図形AST」

$$=\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{3}{5}\pi+\frac{1}{2}\cdot\left|10\cos\frac{3}{5}\pi\right|\cdot 10\sin\frac{3}{5}\pi-\left(\frac{42}{5}\pi+25\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

$$=30\pi+50\sin\frac{2}{5}\pi\cos\frac{2}{5}\pi-\frac{42}{5}\pi-25\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=\frac{108}{5}\pi+25\sin\frac{4}{5}\pi-25\sin\frac{\pi}{5}$$

$$=\frac{108}{5}\pi$$

大きい方の面積は，円Cの面積から引いて $100\pi-\frac{108}{5}\pi=\frac{392}{5}\pi$