

[東京大学 2004 年前期 理科 2]



自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

- (1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し、10 の位の数を a 、1 の位の数を b とおいたとき、 $a+b$ が偶数となるならば、 b は 0 または 4 であることを示せ。
- (2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し、1000 の位の数、100 の位の数、10 の位の数、および 1 の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば、その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。



- (1) 問題の平方数を x^2 ($x > 0$) とすると、 x^2 は 3 桁以上であるから x は 2 桁以上である。

よって、 x の 1 の位を u 、10 の位を v とすると、 $x^2 = u^2 + 20uv + (100 \text{ の倍数})$ と表せる。

u^2 の 10 の位を a' 、1 の位を b' とする。

$20uv$ の 10 の位は偶数であり、1 の位は 0 であるから

$$a = a' + (\text{偶数}), \quad b = b'$$

したがって、 $a' + b'$ は偶数でなければならない。

$u = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ のうち、この条件を満たすものは

$$u = 0 \quad (a' = 0, b' = 0)$$

$$u = 2 \quad (a' = 0, b' = 4)$$

$$u = 8 \quad (a' = 6, b' = 4) \quad \text{であるから } b = b' = 0 \text{ または } 4$$

- (2) 問題の平方数 x^2 は、1 の位と 10 の位が等しいので、(1)の条件を満たす。

よって、 x^2 の 1 の位は 0 または 4 である。

もし、 x^2 の 1 の位が 4 であるとする、下 4 桁がすべて 4 となり、

$$x^2 = 4444 + (10000 \text{ の倍数}) \text{ となる。}$$

したがって、 x は偶数であるから $x = 2y$ とおくと、

$$y^2 = 1111 + (2500 \text{ の倍数}) \text{ となる。}$$

すなわち、平方数 y^2 の 1 の位と 10 の位は 1 でなければならないが、(1)よりそれはあり得ない。

よって、 x^2 の 1 の位は 0、すなわち、 x^2 の下 4 桁はすべて 0 となり、 x^2 は 10000 で割り切れる。