## [ 東京大学 2004 年前期 理科 $\boxed{1}$ ]

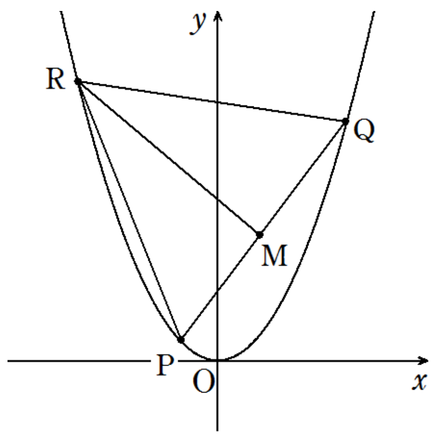
$xy$ 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 $\mathrm{P,Q,R}$ が次の条件を満たしている。

$\triangle\mathrm{PQR}$ は一辺の長さ $a$ の正三角形であり，点 $\mathrm{P,Q}$ を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき，$a$ の値を求めよ。

---

$p<q$ とし，$\mathrm{P}(p,\ p^2),\ \mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。




直線 $\mathrm{PQ}$ の傾きが $\sqrt{2}$ であるから

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2} \quad \text{より} \quad p+q=\sqrt{2} \quad \cdots①$$

また，$\mathrm{PQ}=a$ より $\sqrt{(q-p)^2+(q^2-p^2)^2}=a$

$$\Leftrightarrow\ (q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow\ (q-p)^2+(q-p)^2(p+q)^2=a^2$$

これと①より $3(q-p)^2=a^2$ であるから $q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ $\cdots②$

ここで，線分 $\mathrm{PQ}$ の中点を $\mathrm{M}$ とすると $\mathrm{M}\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ であり，

①，②より $q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right),\ p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$ なので

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\dfrac{1}{4}\left(2-\dfrac{a^2}{3}\right)=1+\dfrac{a^2}{6}$ であるから $\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$

$\triangle\mathrm{PQR}$ は 1 辺の長さが $a$ の正三角形であるから $\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ},\ \mathrm{RM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ である。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{MR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2},\ 1\right)$$

$$= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} a,\ \frac{1}{2} + \frac{a^2}{12} \pm \frac{a}{2} \right) \quad \text{（複号同順）}$$

R は放物線 $y = x^2$ 上にあるので

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2}{12} \pm \frac{a}{2} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} a \right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 6 + a^2 \pm 6a = 6 \mp 12a + 6a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 5a^2 \mp 18a = 0$$

$a > 0$ より $a = \dfrac{18}{5}$