

[東京大学 2004 年前期 理科 1]



xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり、点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき、 a の値を求めよ。



[東京大学 2004 年前期 理科 2]



自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

- (1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し、10 の位の数を a 、1 の位の数を b とおいたとき、 $a+b$ が偶数となるならば、 b は 0 または 4 であることを示せ。
- (2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し、1000 の位の数、100 の位の数、10 の位の数、および 1 の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば、その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。



[東京大学 2004 年前期 理科 3]



半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を、円 C に内接させながら、円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の一点を P とする。点 P が、円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は、円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。



[東京大学 2004 年前期 理科 4]



関数 $f_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

$$f_1(x) = x^3 - 3x, f_2(x) = \{f_1(x)\}^3 - 3f_1(x), f_3(x) = \{f_2(x)\}^3 - 3f_2(x)$$

以下同様に, $n \geq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば, 関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x) = \{f_n(x)\}^3 - 3f_n(x)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a を実数とする。 $f_1(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) a を実数とする。 $f_2(x) = a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (3) n を 3 以上の自然数とする。 $f_n(x) = 0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。



[東京大学 2004 年前期 理科 5]



r を正の実数とする。xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を A ，点 $P(r, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし，球 A と球 B の和集合とは，球 A と球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1) V を r の関数として表し，そのグラフの概形をかけ。

(2) $V = 8$ となるとき， r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

(注意) 円周率 π は $3.14 < \pi < 3.15$ を満たす。



[東京大学 2004 年前期 理科 6]



片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が3枚ある。この3枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り、出た目が1, 2であれば左端の板を裏返し, 3, 4であればまん中の板を裏返し, 5, 6であれば右端の板を裏返す。たとえば, 最初, 板の表の色の並び方が「白白白」であったとし, 1回目の操作で出たさいころの目が1であれば, 色の並び方は「黒白白」となる。さらに2回目の操作を行って出たさいころの目が5であれば, 色の並び方は「黒白白」となる。

- (1) 「白白白」から始めて, 3回の操作の結果, 色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。
- (2) 「白白白」から始めて, n 回の操作の後, 色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

(注意) さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする。

