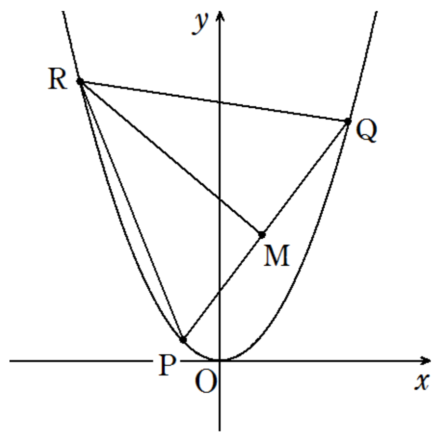
[東京大学 2004 年前期 文科 $\boxed{1}$]

xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 $\mathrm{P,Q,R}$ が次の条件を満たしている。

$\triangle\mathrm{PQR}$ は一辺の長さ a の正三角形であり，点 $\mathrm{P,Q}$ を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき，a の値を求めよ。



$p<q$ とし，$\mathrm{P}(p,\ p^2),\ \mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ であるから

$\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2}$ より $p+q=\sqrt{2}$ …①

また，$\mathrm{PQ}=a$ より $\sqrt{(q-p)^2+(q^2-p^2)^2}=a$

$\Leftrightarrow\ (q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$\Leftrightarrow\ (q-p)^2+(q-p)^2(p+q)^2=a^2$

これと①より $3(q-p)^2=a^2$ であるから $q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ …②

ここで，線分 PQ の中点を M とすると $\mathrm{M}\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ であり，

①，②より $q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right),\ p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$ なので

$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\dfrac{1}{4}\left(2-\dfrac{a^2}{3}\right)=1+\dfrac{a^2}{6}$ であるから $\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$

$\triangle\mathrm{PQR}$ は 1 辺の長さが a の正三角形であるから $\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ},\ \mathrm{RM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ である。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{MR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2},\ 1\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\right)$$ （複号同順）

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \iff 6+a^2\pm 6a=6\mp 12a+6a^2$$

$$\iff 5a^2\mp 18a=0$$

$a>0$ より $a=\dfrac{18}{5}$

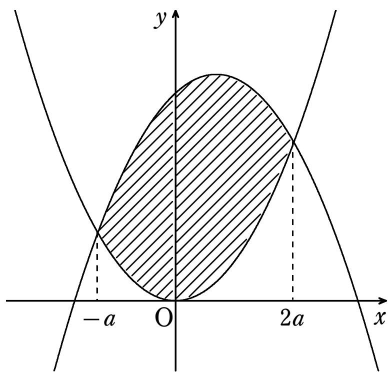
[東京大学 2004 年前期 文科 $\boxed{2}$]

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点$\{x, y\}$全体からなる領域を D とする。

$$y \geqq x^2,\ y \leqq -2x^2 + 3ax + 6a^2$$

領域 D における $x + y$ の最大値，最小値を求めよ。

$f(x) = x^2$ …①，$g(x) = -2x^2 + 3ax + 6a^2$ …② とおく。



2 曲線の交点の x 座標は　$f(x) = g(x) \iff x^2 = -2x^2 + 3ax + 6a^2$

$\iff 3x^2 - 3ax - 6a^2 = 0$

$\iff (x + a)(x - 2a) = 0$

より　$x = -a,\ 2a$

$x + y = k$　とおくと　$y = -x + k$　…③ であり，傾き -1 の直線を表す。

まず，③が領域 D と共有点をもつような k の最大値を求める。

②の接線の傾きが -1 となるのは　$g'(x) = -4x + 3a$　より

$-4x + 3a = -1$　から　$x = \dfrac{3a+1}{4}$

（ｉ）$\dfrac{3a+1}{4} \leqq 2a$　すなわち　$a \geqq \dfrac{1}{5}$　のとき

k は $\left(\dfrac{3a+1}{4},\ -2\left(\dfrac{3a+1}{4}\right)^2 + 3a \cdot \dfrac{3a+1}{4} + 6a^2\right)$ で最大となり，

最大値は　$k = \dfrac{3a+1}{4} - 2\left(\dfrac{3a+1}{4}\right)^2 + 3a \cdot \dfrac{3a+1}{4} + 6a^2 = \dfrac{57}{8}a^2 + \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{8}$

（ii）$\dfrac{3a+1}{4} > 2a$　すなわち　$0 < a < \dfrac{1}{5}$　のとき

k は①と②の交点　$(2a,\ 4a^2)$　で最大となり，最大値は　$k = 2a + 4a^2$

次に，③が領域 D と共有点をもつような k の最小値を求める。

①の接線の傾きが -1 となるのは　$f'(x) = 2x$　より

$2x = -1$　から　$x = -\dfrac{1}{2}$

（iii）$-a \leqq -\dfrac{1}{2}$ すなわち $a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

k は接点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ で最小となり，最小値 $k = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$

（iv）$-a > -\dfrac{1}{2}$ すなわち $0 < a < \dfrac{1}{2}$ のとき

k は①と②の交点 $(-a,\ a^2)$ で最小となり，最小値 $k = -a + a^2$

(ｉ)～(iv)をまとめると，最大値を M，最小値を m として

$0 < a < \dfrac{1}{5}$ のとき $M = 2a + 4a^2$， $m = -a + a^2$

$\dfrac{1}{5} \leqq a < \dfrac{1}{2}$ のとき $M = \dfrac{57}{8}a^2 + \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{8}$， $m = -a + a^2$

$a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $M = \dfrac{57}{8}a^2 + \dfrac{3}{4}a + \dfrac{1}{8}$， $m = -\dfrac{1}{4}$

[**東京大学 2004 年前期 文科 $\boxed{3}$**]

関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次式で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

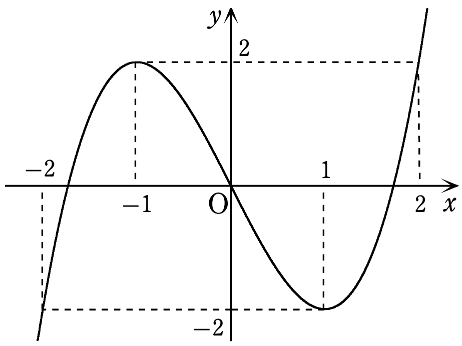
(2) $g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) $h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(1) $f(x)=x^3-3x$ より $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



よって，$y=f(x)$ のグラフは図のようになるので，

$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数は　$a<-2,\ 2<a$ のとき 1 個

$a=\pm 2$ のとき 2 個

$-2<a<2$ のとき 3 個

(2) $g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\left\{\left(f(x)\right)^2-3\right\}=0$ より $f(x)=0,\ \pm\sqrt{3}$ …①

(1)より①を満たす x の個数はそれぞれ 3 個で，これらはすべて異なる。

よって求める個数は 3×3＝9 個

(3) $h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)=0 \Leftrightarrow g(x)\left\{\left(g(x)\right)^2-3\right\}=0$ より $g(x)=0,\ \pm\sqrt{3}$

$g(x)=0$ を満たす x は(2)より 9 個である。

$g(x)=\sqrt{3}$ のとき，$f(x)=t$ とおくと

$\{f(x)\}^3-3f(x)=\sqrt{3} \iff t^3-3t=\sqrt{3}$

$\iff f(t)=\sqrt{3}$

(1)のグラフより，これを満たす実数tは 3 個あり，小さい方から t_1, t_2, t_3 とすると

(1)のグラフから $-2<t_1<-1<t_2<1<t_3<2$ である。

したがって， $f(x)=t_1, t_2, t_3$ を満たすxの個数はそれぞれ 3 個で，これらはすべて異なるので

全部で 3×3＝9 個ある。

$g(x)=-\sqrt{3}$ についても同様にして 9 個ある。

以上より，求める実数xの個数は 9×3＝27 個。

[東京大学 2004 年前期 文科 $\boxed{4}$]

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す。たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の後，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。p_{2k+1}（k は自然数）を求めよ。

（注意）さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

(1) 3 回後に「黒白白」となるのは

「左端の板を 3 回裏返す」

「左端の板を 1 回，まん中の板を 2 回裏返す」

「左端の板を 1 回，右端の板を 2 回裏返す」

ときであるから，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+2\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{7}{27}$

(2) p_n は，n 回後に白の枚数が 2 枚になる確率であり，白の枚数が 2 枚になるのは奇数回の操作の後である。

白が x 枚，黒が y 枚であることを $(x,\ y)$ と表すものとすると，白と黒の枚数は次のように推移する。

$$\begin{tikzcd}
2k-1\text{ 回} & 2k\text{ 回} & 2k+1\text{ 回} \\
\begin{matrix}(2,\ 1)\\ p_{2k-1}\end{matrix} \arrow[r, "\frac{1}{3}"] \arrow[dr, "\frac{2}{3}"] & (3,\ 0) \arrow[r, "1"] & \begin{matrix}(2,\ 1)\\ p_{2k+1}\end{matrix} \\
\begin{matrix}(0,\ 3)\\ 1-p_{2k-1}\end{matrix} \arrow[r, "1"'] & (1,\ 2) \arrow[ur, "\frac{2}{3}"] &
\end{tikzcd}$$

したがって，　$p_{2k+1}=\left(\frac{1}{3}\cdot1+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)p_{2k-1}+1\cdot\frac{2}{3}(1-p_{2k-1})$

$$p_{2k+1}=\frac{1}{9}p_{2k-1}+\frac{2}{3}\quad\cdots①$$

①は　$p_{2k+1}-\frac{3}{4}=\frac{1}{9}\left(p_{2k-1}-\frac{3}{4}\right)$　と変形でき，　$p_{2k+1}-\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(p_1-\frac{3}{4}\right)$　となり，

$p_1=1$　であるから　$p_{2k+1}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k$