[東京大学 2004 年前期 文科 $\boxed{4}$]

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す。たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の後，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。p_{2k+1}（k は自然数）を求めよ。

（注意）さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

---

(1) 3 回後に「黒白白」となるのは

「左端の板を 3 回裏返す」

「左端の板を 1 回，まん中の板を 2 回裏返す」

「左端の板を 1 回，右端の板を 2 回裏返す」

ときであるから，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + 2\times {}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{7}{27}$

(2) p_n は，n 回後に白の枚数が 2 枚になる確率であり，白の枚数が 2 枚になるのは奇数回の操作の後である。

白が x 枚，黒が y 枚であることを $(x,\ y)$ と表すものとすると，白と黒の枚数は次のように推移する。

$$\begin{tikzcd}
2k-1\text{回} & 2k\text{回} & 2k+1\text{回} \\
\underset{p_{2k-1}}{(2,\ 1)} \arrow[r, "\frac{1}{3}"] \arrow[dr, "\frac{2}{3}"] & (3,\ 0) \arrow[r, "1"] & \underset{p_{2k+1}}{(2,\ 1)} \\
\underset{1-p_{2k-1}}{(0,\ 3)} \arrow[r, "1"'] & (1,\ 2) \arrow[ur, "\frac{2}{3}"] &
\end{tikzcd}$$

したがって， $p_{2k+1}=\left(\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)p_{2k-1}+1\cdot\frac{2}{3}(1-p_{2k-1})$

$$p_{2k+1}=\frac{1}{9}p_{2k-1}+\frac{2}{3}\quad\cdots①$$

①は $p_{2k+1}-\frac{3}{4}=\frac{1}{9}\left(p_{2k-1}-\frac{3}{4}\right)$ と変形でき， $p_{2k+1}-\frac{3}{4}=\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(p_1-\frac{3}{4}\right)$ となり，

$p_1=1$ であるから $p_{2k+1}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k$