

[東京大学 2004 年前期 文科 4]



片面を白色に、もう片面を黒色に塗った正方形の板が3枚ある。この3枚の板を机の上に横に並べ、次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り、出た目が1, 2であれば左端の板を裏返し、3, 4であればまん中の板を裏返し、5, 6であれば右端の板を裏返す。たとえば、最初、板の表の色の並び方が「白白白」であったとし、1回目の操作で出たさいころの目が1であれば、色の並び方は「黒白白」となる。さらに2回目の操作を行って出たさいころの目が5であれば、色の並び方は「黒白白」となる。

- (1) 「白白白」から始めて、3回の操作の結果、色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。
- (2) 「白白白」から始めて、 n 回の操作の後、色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。 p_{2k+1} (k は自然数) を求めよ。
- (注意) さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする。



(1) 3回後に「黒白白」となるのは

「左端の板を3回裏返す」

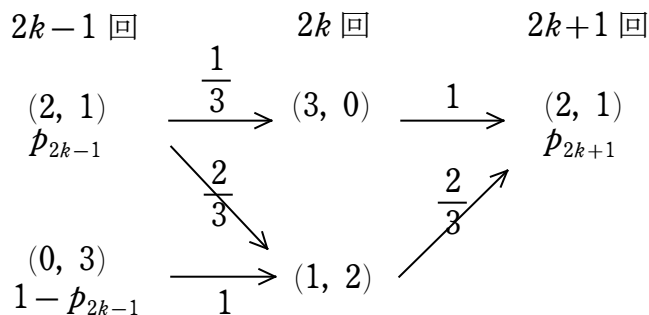
「左端の板を1回、まん中の板を2回裏返す」

「左端の板を1回、右端の板を2回裏返す」

ときであるから、
$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{27}$$

(2) p_n は、 n 回後に白の枚数が2枚になる確率であり、白の枚数が2枚になるのは奇数回の操作の後である。

白が x 枚、黒が y 枚であることを (x, y) と表すものとする、白と黒の枚数は次のように推移する。



したがって、 $p_{2k+1} = \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) p_{2k-1} + 1 \cdot \frac{2}{3} (1 - p_{2k-1})$

$$p_{2k+1} = \frac{1}{9} p_{2k-1} + \frac{2}{3} \cdots \textcircled{1}$$

①は $p_{2k+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{9} \left(p_{2k-1} - \frac{3}{4} \right)$ と変形でき、 $p_{2k+1} - \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{9} \right)^k \left(p_1 - \frac{3}{4} \right)$ となり、

$p_1 = 1$ であるから $p_{2k+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \right)^k$